JOURNAL AFRICAIN DES SCIENCES
VOL. 3, **2** (2026) 117-135

https://jafrisci.org

ISSN (online) : 3107-0949 ; ISSN (print) : 3107-0930

OPEN ACCESS

ARTICLE DE RECHERCHE

Article Info.:
Reçu : le 26/02/2026
Accepté: le 21/03/2026
Publié : le 31/03/2026

CONSTRUCTION D'UNE BASE HILBERTIENNE PAR PERTURBATION

Patrick Kabongo Mukendi [1,*], **Pascal Kampotu Mubenga** [1], **Joseph Kyemba Bukweli** [1]

https://doi.org/10.70237/jafrisci.2026.v3.i2.12

Résumé

Nous considérons un espace de Hilbert (X, (.|.)) sur le corps $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une base $\{e_i\}_{i\in I}$hilbertienne et une famille orthonormée $\{U_i\}_{i\in I}$ indexé par le même ensemble quelcoque *I*. Nous donnons une condition suffisante pour que la famille $\{U_i\}_{i\in I}$ soit aussi une base hilbertienne de *X*, à savoir $\sum_{i\in I}\|u_i - e_i\|^2 < +\infty$, qui est moins contraignante que celles données par Tosio Kato dans "Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1995.

Mots-clés: Espace de Hilbert, théorie de perturbation, théorie de sommabilité, opérateur d'Hilbert-Schmidt, base hilbertienne

Abstract

We consider a Hilbert space (X, (.|.)) over the field $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (real numbers set) or $\mathbb{C}$ (complex numbers set) equipped with a Hilbertian basis $\{e_i\}_{i\in I}$ and an orthonormal family $\{U_i\}_{i\in I}$ indexed by the same arbitrary set I. We give a sufficient condition for the family $\{U_i\}_{i\in I}$ to also be a Hilbertian basis of X, namely $\sum_{i\in I}\|u_i - e_i\|^2 < +\infty$, which is less restrictive than those given by Tosio Kato in : Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1995

Keywords: Hilbert space, perturbation theory, sommability theory, Hilbert-Schmidt,operator, hilbertian basis

Correspondance : *mukendipatrick@gmail.com (P. **K. Mubenga**)*

Copyright : © The Author(s) Published under a Creative Commons Attribution 4.0 International Licence (CC BY 4.0)

[1]*Mention Mathématiques,Statistique et Informatique, Faculté des Sciences et Technologies, Université de Kinshasa, Kinshasa, République démocratique du Congo*

Construction d'une base hilbertienne par perturbation

Patrick Kabongo Mukendi[1,*], Pascal Kampotu Mubenga [1] ,
Joseph Kyemba Bukweli [1]

Abstract
We consider a Hilbert space $(X,(.|.))$ over the field $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ equipped with a Hilbertian basis $\{e_i\}_{i\in I}$ and an orthonormal family $\{u_i\}_{i\in I}$ indexed by the same arbitrary set I. We give a sufficient condition for the family $\{u_i\}_{i\in I}$ to also be a Hilbertian basis of X, namely $\sum_{i\in I} \parallel u_i - e_i \parallel^2 < +\infty$, which is less restrictive than those given by Tosio Kato in : Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1995.
Key words : Hilbert space, perturbation theory, sommability theory, Hilbert-Schmidt operator, hilbertian basis.

Résumé
Nous considérons un espace de Hilbert $(X,(.|.))$ sur le corps $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une base $\{e_i\}_{i\in I}$ hilbertienne et une famille orthonormée $\{u_i\}_{i\in I}$ indexé par le même ensemble quelcoque I. Nous donnons une condition suffisante pour que la famille $\{u_i\}_{i\in I}$ soit aussi une base hilbertienne de X, à savoir $\sum_{i\in I} \parallel u_i - e_i \parallel^2 < \infty$, qui est moins contraignante que celles données par Tosio Kato dans "Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1995."
Mots clés : espace de Hilbert, théorie de pertubation, théorie de sommabilité, opérateur d'Hilbert-Schmidt, base hilbertienne.

1 Introduction

L'intérêt de cette étude porte sur quelques propriétés des espaces de Hilbert [8]-[12]. Les deux propriétés les caractérisant sont celles d'être des espaces vectoriels normés complets et de posséder des bases orthonormées, dites souvent bases hilbertiennes, celles-ci sont pour les espaces de Hilbert ce que représentent les bases

Corresponsdance : mukendipatrick@gmail.com (Mukendi Kabongo)

[1]désigne : Université de Kinshasa. Département de Mathématiques, Statistique et Informatique. République Démocratique du Congo

algébriques pour les espaces vectoriels. Mais, les deux concepts ont leurs spécificités et il existe des liens entre eux[13].

La théorie de perturbation fut introduite par Rayleigh et Schrodinger dans le but de trouver une solution approchée d'un système partant d'un système simple dont on connaît la solution exacte [7], [4].

Kato Tosio présente dans [13] le problème de perturbation d'une base hilbertienne en ces termes : On considère $(X, (.|.))$ un espace de Hilbert sur un corps $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\{e_i\}_{i\in I}$ une base hilbertienne de X. Etant donné un système quelconque $\{u_i\}_{i\in I}$ de X, on définit une mesure de proximité entre la base $\{e_i\}_{i\in I}$ et le système $\{u_i\}_{i\in I}$ par la quantité $r^2 = \sum_{i\in I} \| u_i - e_i \|^2$ pour dire que $\{e_i\}_{i\in I}$ est plus proche de $\{u_i\}_{i\in I}$ si r^2 est plus petit ; trouver une condition suffisante pour que le système $\{u_i\}_{i\in I}$ soit une base hilbertienne de X. Il montre que $\{u_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne si $\sum_{i\in I} \alpha_i u_i = \theta$, $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $\forall i \in I$ implique chaque $\alpha_i = 0$; c'est-à-dire les u_i, $i \in I$ sont linéairement indépendants. Il montre en outre que si $\{u_i\}_{i\in I}$ est un système orthonormé, alors il constitue une base hilbertienne si $\sum_{i\in I} r_i^2(1 - \frac{1}{4}r_i^2) < \infty$ où $r_i = \| e_i - u_i \|$ $\forall i \in I$.

La construction d'une base hilbertienne dans un espace de Hilbert séparable consiste généralement à trouver une famille orthonormée totale en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à une famille génératrice dénombrable et dense de cet espace [2]. Pour le cas d'un espace non séparable la procédure s'appuie sur le lemme de Zorn (ou Théorème de maximalité de Hausdorff) [14]. Elle consiste à considèrer un ensemble des familles orthonormées et partiellement ordonné par inclusion. La base hilbertienne est obtenue en considérant l'élément maximal de cet ensemble [14].

La notion de sommabilité, utile pour les bases hilbertiennes, généralise celle de séries quand la somme est évaluée sur une famille non dénombrable d'éléments d'un espace topologique quelconque. Néanmoins cette notion peut aussi être retrouvée chez nombreux auteurs [1], [2], [6], [8], [13]. Notons aussi la notion de base hilbertienne peut être définie sans faire référence à la sommabilité [9].

En utilisant les notions de sommabilité et en construisant un opérateur de Hilbert-Schmidt, nous montrons qu'étant donnée une base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in I}$, la famille orthonormale $\{u_i\}$ est encore une base hilbertienne si $\sum_{i\in I} \| u_i - e_i \|^2 < +\infty$. Ce qui est une extension du résultat que Kato propose dans [13]. On montre également, à l'aide d'un contre-example, que cette condition n'est pas nécéssaire.

Le reste de l'article est organisé comme suit : Dans la section 2, nous rappelons la définition d'un espace de Hilbert et donnons quelques resutats importants des espaces de Hilbert. Dans la section 3, nous dévèloppons la théorie de la somma-

bilité dans un espace semi-normé quelconque afin d'introduire la définition d'une base hilbertienne. La section 4 donne la construction d'une base hilbertienne par perturbation d'une base hilbertienne donnée. Une remarque concluante clôture notre article.

2 Quelques propriétés des espaces hilbertiens et des opérateurs compacts

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{F}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et X est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{F}$.

Définition 2.1 (Produit scalaire).
Soit X un espace vectoriel (e.v) sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Par un semi-produit scalaire sur X on entend une fonction de X^2 dans $\mathbb{F}$, notée $(.|.)$ qui
$(x, y) \in X^2 \mapsto (x|y)$ et vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)\ \forall x, y, z \in X$;

(2) $\overline{(y|x)} = (x|y)\ \forall x, y \in X$, où $\overline{(y|x)}$ désigne le conjugué complexe ;

(3) $0 \leq (x|x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in X$;

(4) $(\alpha x|y) = \alpha.(x|y)\ \forall \alpha \in \mathbb{F}\ \forall x, y \in X$.

Par un produit scalaire sur X on entend un semi produit scalaire $(.|.)$ sur X tel que

(5) $\forall x(x \in X \text{ et } (x|x) = 0) \implies x = \theta$, où θ est le vecteur nul de X.

Un produit scalaire est souvent appelé, forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Définition 2.2 (Espace préhilbertien).
Un espace préhilbertien est un espace vectoriel X muni d'un produit scalaire.

Définition 2.3 (Espace hilbertien).
On appelle espace hilbertien (ou espace de Hilbert) tout espace préhilbertien $(X, (.|.))$ complet pour la norme $\| \ . \ \|$ associée au produit scalaire c'est-à-dire $\| x \| = \sqrt{(x|x)}$ pour $x \in X$.

Remarque 2.4.
Un espace de Hilbert est un espace de Banach pour la norme associée au produit scalaire.

Définition 2.5 (Opérateur compact). [2]
Soient X, Y des espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur(une application linéaire et continue) de X vers Y. On dit que T est compact si l'image de la boule unité $B_X = \{x \in X : \| x \|_X \leq 1\}$ est relativement compacte dans Y c'est-à-dire $\overline{T(B_X)}$ est compact dans Y.

Définition 2.6 (Opérateur de Hilbert-Schmidt).
Un opérateur T d'un espace hilbertien X sur un espace hilbertien Y est dit de Hilbert-Schmidt si pour une base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ on a[13]

$$\left(\sum_{i\in I} \| Te_i \|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{1}$$

Remarque 2.7.
Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur compact[2].

Pour clore cette section, nous énoncons le théorème suivant dont la preuve peut être trouvée dans [2] :

Théorème 2.8.
Soit E un espace de Banach. Soit $T : E \to E$ un opérateur compact sur E. Alors pour l'opérateur $I - T$ on a :

1. le noyau de $I-T$ est de dimension finie autrement dit $dim\,(Ker(I-T)) < \infty$,
2. $I - T$ est de rang fini, $Im\,(I - T)$ est un fermé de E.
3. Si $I - T$ est injectif alors $I - T$ est inversible.

3 Familles sommables et Bases hilbertiennes

3.1 Familles sommables

Définitions 3.1.
Soit $(X, \| \, . \, \|)$ un espace semi-normé sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Une famille $\{x_t\}_{t\in I}$ d'éléments dans X est dite sommable pour $\| \, . \, \|$ et de somme $w \in X$ si et seulement si quel que soit un $\tau_{\|.\|}$-voisinage G de w il existe une partie finie K de I telle que si $K \subset J \subset I$ avec J finie on ait $\sum_{t\in J} x_t \in G$.
2. Une famille $\{x_t\}_{t\in I}$ dans X est dite normalement sommable pour $\| \, . \, \|$ si et seulement si la famille réelle $\{\| x_t \|\}_{t\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ pour le module.

3. Une famille $\{x_t\}_{t\in I}$ dans X est dite semi-sommable pour $\| \, . \, \|$ si et seulement si elle est sommable pour $\| \, . \, \|$ mais n'est pas normalement sommable.

Théorème 3.2 (Caractérisation d'une famille sommable).
Soit $\{x_t\}_{t\in I}$ un famille dans un espace semi-normé $(X, \| \, . \, \|)$.
Notons $\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{J \subset I : \text{J fini}\}$. Si $K, \, L \in \mathcal{F}(I)$ définissons $K \leq L$ comme signifiant $K \subset L$ et soit $S_K = \sum_{t\in K} x_t$. Alors

1. $(\mathcal{F}(\mathcal{I}), \subset)$ est un ensemble dirigé et ainsi, $\left(S_J = \sum_{t\in J} x_t, \, J \in \mathcal{F}(\mathcal{I}), \, \subset \right)$ est une suite généralisée dans X, qu'on appellera suite généralisée engendrée par la famille $\{x_t\}_{t\in I}$
2. Les énoncés suivants sont équivalents :
   (a) La famille $\{x_t\}_{t\in I}$ est sommable pour $\| \, . \, \|$ de somme w.
   (b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathcal{F}(I)$ tel que $K \subset L \subset I$ et L fini $\implies \| \, w - S_L \| < \varepsilon$.

Preuve :
L'affirmation 1. est évidente par la définition d'un ensemble dirigé et d'une suite généralisée.
2.(a) $\implies$ 2.(b) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Alors la boule $G = B_\varepsilon = \{x : \| \, x \, \| \leq \varepsilon\}$ est un voisinage de w pour $\tau_{\|.\|}$ donc selon 2.(a) et la définition il existe une partie finie K de I telle que si $K \subset L \subset I$ avec L fini on ait $\sum_{t\in L} x_t \in G$ càd $S_L \in B_\varepsilon$ c'est-à-dire $\| \, S_L - w \, \| < \varepsilon$. Mais K étant une partie finie de I on a $K \in \mathcal{F}(I)$. Donc finalement, $\exists K \in \mathcal{F}(I)$ tel que $K \subset L \subset I$ et L fini $\implies \| \, S_L - w \, \| < \varepsilon$.
2.(b) $\implies$ 2.(a) Donnons - nous un voisinage G de w pour $\tau_{\|.\|}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$B(w, \varepsilon, \| \, . \, \|, X) \subset G$. En vertu de 2.(b) $\exists K \in \mathcal{F}(I)$ tel que pour $K \subset L \subset I$ avec L fini on ait $\| \, S_L - w \, \| < \varepsilon$ donc $S_L \in B_\varepsilon \subset G \implies S_L \in G$. Or $K \in \mathcal{F}(I)$ signifie K est une partie finie de I. D'où finalement, il existe une partie finie K de I tel que pour $K \subset L \subset I$ avec L fini on ait $S_L \in G$.

Corollaire 3.3.
Soit $(X, \| \, . \, \|)$ un espace normé réel ou complexe. Une famille $\{x_t\}_{t\in I}$ dans X admet tout au plus une somme dans X pour $\| \, . \, \|$ c'est-à-dire si $\{x_t\}_{t\in I}$ est de sommes respectives $w \in X$ et $v \in X$ dans X pour $\| \, . \, \|$, alors $v = w$.

Preuve.
En vertu de la définition de la convergence pour $\tau_{\|.\|}$ d'une suite généralisée, les hypothèses signifient que la suite généralisée $\left(\sum_{t\in K} x_t, K \in \mathcal{F}(I), \subset \right)$ converge vers

w et vers v pour $\tau_{\|.\|}$. Mais $\|\ .\ \|$ étant une norme on sait que $\tau_{\|.\|}$ est séparée, doù $w = v$.

Donc, lorsque une famille $\{x_t\}_{t\in I}$ dans un esapce normé réel ou complexe X admet une somme dans X pour $\|\ .\ \|$, celle -ci est unique ; nous la noterons $\sum_{t\in I} x_t$, ce qui signifie ainsi que $\sum_{t\in I} x_t = \lim_{\|.\|}\left(\sum_{t\in K} x_t, K \in \mathcal{F}(I), \subset\right)$.

Proposition 3.4 (Combinaison linéaire de deux familles sommables).
Soit I un ensemble, $\{x_t\}_{t\in K}$ et $\{y_t\}_{t\in K}$ des familles un espace semi-normé $(X, \|\ .\ \|)$ sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, et si $\{x_t\}_{t\in K}$ et $\{y_t\}_{t\in K}$ sont deux familles sommables pour $\|\ .\ \|$ de sommes respectives $x \in X$ et $y \in X$, alors la famille $\{\alpha x_t + \beta y_t\}_{t\in K}$ est encore sommable de somme $\alpha x + \beta y \in X$.

Preuve :
Considérons un réel $\varepsilon > 0$. Les réels $\frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|)}$ et $\frac{\varepsilon}{2(1+|\beta|)}$ sont > 0, donc d'après les hypothèses et la caractérisations de familles sommables du Théorème3.2 ci-dessus $\exists K_1,\ K_2 \in \mathcal{F}(I)$ tel que

$$K_1 \subset L \subset I \text{ et } L \text{ fini} \implies \| \alpha - \sum_{t\in L} x_t \| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|)} \dots (*)$$

$$K_2 \subset L \subset I \text{ et } L \text{ fini} \implies \| \alpha - \sum_{t\in L} y_t \| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\beta|)} \dots (**).$$

L'ensemble $K = K_1 \cup K_2$ est une partie finie de I, $K \in \mathcal{F}(I)$ et on a : $L \in \mathcal{F}(I)$ et $K \subset \implies L \in \mathcal{F}(I)$, $K_1 \subset L$ et $K_2 \subset L$, (*) et (**) impliquent

$$\begin{aligned}
\| (\alpha x + \beta y) - \sum_{t\in L}(\alpha x_t - \beta y_t) \| &= \| \alpha(x - \sum_{t\in L} x_t) + \beta(y - \sum_{t\in L} y_t) \| \\
&\leq |\alpha| \| (x - \sum_{t\in L} x_t) \| + |\beta| \| (y - \sum_{t\in L} y_t) \| \\
&\leq |\alpha| \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2(1+|\beta|)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|)} + \frac{\varepsilon}{2}.\frac{|\beta|}{1+|\beta|)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathcal{F}(I)$ tel que $L \in \mathcal{F}(I)$ et $K \subset L \implies \| (\alpha x + \beta y) - \sum_{t\in L}(\alpha x_t - \beta y_t) \| < \varepsilon$. Ce qui signifie que la famille $\{\alpha x_t + \beta y_t\}_{t\in K}$ est sommable pour $\|\ .\ \|$ de somme $\alpha x + \beta y$.

Définition 3.5 (Critère de Cauchy).
Soit $(X, \| \ . \ \|)$ un espace vectoriel normé. On dit que la famille $\{x_t\}_{t\in I}$ vérifie le critère de Cauchy, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J_\varepsilon \in \mathcal{F}(I)$ telle que $\forall\ L \in \mathcal{F}(I)$ tel que $J_\varepsilon \cap L = \emptyset$ on ait $\| \sum_{t\in L} x_t \| < \varepsilon$

Proposition 3.6.

(i) Toute famille sommable vérifie le critère de Cauchy.

(ii) Si $(X, \| \ . \ \|)$ est un espace de Banach, on a réciproquement, toute famille vérifiant le critère de Cauchy est sommable.

Preuve.

(i) Considérons un espace normé $(X, \| \ . \ \|)$ réel ou complexe et une famille $\{x_t\}_{t\in I}$ sommable dans X pour $\| \ . \ \|$ de somme $w \in X$. Notons S la suite généralisée engendrée par $\{x_t\}_{t\in I}$. Comme la famille $\{x_t\}_{t\in I}$ est sommable pour $\| \ . \ \|$ dans X alors S converge dans X pour $\| \ . \ \|$ et donc S est de Caushy pour $\| \ . \ \|$.
Soit $\varepsilon > 0$. Dire que S est de Caushy pour $\| \ . \ \|$ implique $\exists\ K_0 \in \mathcal{F}(I)$ M, L$\in \mathcal{F}(I)$, $K_0 \subset M$ et $K_0 \subset L \implies \| S_M - S_L \| < \varepsilon$. (a)
Soit maintenant $K \in \mathcal{F}(I)$ avec $K \cap K_0 = \emptyset$. Les ensembles $M \equiv K \cup K_0$ et $L \equiv K_0$ sont tels que $M, L \in \mathcal{F}(I)$ avec $K_0 \subset M$ et $K_0 \subset L$, donc en vertu de (a) nous avons $\| S_M - S_L \| < \varepsilon$. Puisque $K \cap K_0 = \emptyset$ nous savons que $\| S_K \| = \| S_M - S_L \| < \varepsilon$. D'où le résutat.

(ii) C'est évident car un espace de Banach est complet.

Dans les applications on utilise souvent les familles numériques (c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$).

Théorème 3.7.
Soit $\{x_t\}_{t\in I}$ une famille dans $[0, +\infty[$ (donc dans $\mathbb{R}$ qui est un espace de Banach pour le module). Alors $\{x_t\}_{t\in I}$ sera sommable si et seulement si l'ensemble $M = \left\{ \sum_{t\in K} x_t :\ K \in \mathcal{F}(I) \right\}$ est majoré dans $\mathbb{R}$, dans ce cas la somme $\sum_{t\in K} x_t$ est un réel ≥ 0 et vaut $\sup M$, d'où $\sum_{t\in K} x_t \leq \sum_{t\in I} x_t$ pour tout $K \in \mathcal{F}(I)$.

Preuve.

(1) En vertu de l'hypothèse $0 \leq x_t\ \forall t \in I$, nous savons que si $A, E \in \mathcal{F}(I)$ avec $A \subset E$ alors $0 \leq \sum_{t\in A} x_t \leq \sum_{t\in E} x_t$

(2) Clairement $\emptyset \in \mathcal{F}(I)$ d'où $\sum_{t\in\emptyset} x_t \in M$ càd $0 \in M$. Nous pouvons donc conclure que $\emptyset \neq M \subset [0, +\infty[$.

(3) Supposons M majoré dans $\mathbb{R}$. D'après (2) $\exists$ réel $w \geq 0$ tel que $w = \sup M$ Pour voir que $\{x_t\}_{t\in I}$ est sommable, donnons nous un réel $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\alpha \in M$ tel que $w - \varepsilon < \alpha$ (car w=sup M). Comme $\alpha \in M$ $\exists$ A$\in \mathcal{F}(I)$ tel que $\alpha = \sum_{t\in A} x_t$. Nous avons alors $E \in \mathcal{F}(I)$ et $A \subset E \implies$ $\sum_{t\in E} x_t \in M$ donc $\sum_{t\in E} x_t \leq \sup M = w$, et $\sum_{t\in A} x_t \leq \sum_{t\in E} x_t$
$\implies w - \varepsilon < \alpha = \sum_{t\in A} x_t \leq \sum_{t\in E} x_t \leq w < w + \varepsilon$
$\implies w - \varepsilon < \sum_{t\in E} x_t < w + \varepsilon \implies |w - \sum_{t\in E} x_t| < \varepsilon.$
Ainsi $\forall$ réel $\varepsilon > 0$ $\exists A \in \mathcal{F}(I)$ tel que $E \in \mathcal{F}(I)$ et $A \subset E \implies |w - \sum_{t\in E} x_t| < \varepsilon$.

(4) Réciproquement supposons $\{x_t\}_{t\in I}$ sommable dans $\mathbb{R}$ (pour le module) de somme $c \in \mathbb{R}$. Comme $0 < 1 \in \mathbb{R}$ alors $\exists A \in \mathcal{F}(I)$ tel que $E \in \mathcal{F}(I)$ et $A \subset E \implies |c - \sum_{t\in E} x_t| < 1 \implies \sum_{t\in E} x_t < 1 + |c|$

Montrons que le réel $1 + |c|$ majore M. Pour cela soit $\alpha \in M$ d'où $\exists B \in \mathcal{F}(I)$ tel que $\alpha = \sum_{t\in B} x_t$. L'ensemble $E = A \cup B$, où A est comme ci-dessus, vérifie $E \in \mathcal{F}(I)$ avec $B \subset E$ d'où $\sum_{t\in B} x_t \leq \sum_{t\in E} x_t < 1 + |c|$
Il est donc vrai que $1 + |c|$ majore M. Nous pouvons donc appliquer (3) pour conclure que $\{x_t\}_{t\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ pour le module et de somme w=sup M

Corollaire 3.8 (Test de comparaison pour la sommabilité dans $[0, +\infty[$).
Soient $\{x_t\}_{t\in I}$ et $\{y_t\}_{t\in I}$ des familles dans $[0, +\infty[$ telles que $x_t \leq y_t$ $\forall t \in I$. Si $\{y_t\}_{t\in I}$ est sommable (dans $\mathbb{R}$ pour le module) alors il en est de même pour $\{x_t\}_{t\in I}$, et dans ce cas $\sum_{t\in I} x_t \leq \sum_{t\in I} y_t$.

Preuve.
Notons $M = \{\sum_{t\in K} x_t : K \in \mathcal{F}(I)\}$ et P=$\{\sum_{t\in K} y_t : K \in \mathcal{F}(I)\}$. D'après les hypothèses, P est une partie de $\mathbb{R}$ à la fois majorée et non vide, et le réel $\beta = \sup P$ vérifie $\beta \geq 0$, $\{y_y\}_{t\in I}$ est de somme β càd $\beta = \sum_{t\in K} y_t$.

Considérons $K \in \mathcal{F}(I)$. D'abord $\sum_{t\in K} y_t \in P$ donc $\sum_{t\in K} x_t \leq \beta$. Ensuite l'hypothèse $x_t \leq y_t \ \forall t \in K$ implique $\sum_{t\in K} x_t \leq \sum_{t\in K} y_t$, de sorte que $\sum_{t\in K} x_t \leq \beta$.
Cela prouve que le réel β majore M. Il en résulte d'après le théorème ci-dessus que $\alpha = \sup M$ est un réel ≥ 0 tel que $\{x_t\}_{t\in I}$ est sommable pour le module de somme α, donc $\alpha = \sum_{t\in I} x_t$. Finalement comme β majore M on a $\sup M \leq \beta$ càd $\alpha \leq \beta$.
D'où $\sum_{t\in I} x_t \leq \sum_{t\in I} x_t$

Corollaire 3.9.
Soit $\{x_t\}_{t\in I}$ une famille dans un espace semi-normé complet (X,$\| \ . \ \|$) sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ t.q. $\{x_t\}_{t\in I}$ est normalement sommable pour $\| \ . \ \|$. Alors $\{x_t\}_{t\in I}$ est sommable pour $\| \ . \ \|$ dans X et si $\{x_t\}_{t\in I}$ est de somme $w \in X$ pour $\| \ . \ \|$ on a $\| \ w \ \| \leq \sum_{t\in I} \| \ x_t \ \|$.

Preuve.

(1) Considérons un réel $\varepsilon > 0$. Puisque par hypothèse la famille $\{\| \ x_t \ \|\}_{t\in I}$ est sommable pour $|.|$ dans l'espace normé complet $(\mathbb{R}, |.|)$. On peut appliquer le critère de Caushy pour conclure : $\exists \ T \in \mathcal{F}(I)$ tel que $K \in \mathcal{F}(I)$ et $K \cap T = \emptyset$ $\Longrightarrow$
$|\sum_{t\in K} \| \ x_t \ \| \ | = \sum_{t\in K} \| \ x_t \ \| < \varepsilon$, (1.1)
Mais alors, pour $K \in \mathcal{F}(I)$ et $K \cap T = \emptyset$ nous obtenons : $\| \sum_{t\in K} x_t \ \| < \varepsilon \leq \sum_{t\in K} \| \ x_t \ \| < \varepsilon$.
Donc, $\forall$ réel $\varepsilon > 0 \ \exists \ T \in \mathcal{F}(I)$ tel que $K \in \mathcal{F}(I)$ et $K \cap T = \emptyset \implies \| \sum_{t\in K} x_t \ \| < \varepsilon$. Comme l'espace $(X, \| \ . \ \|)$ est complet par hypothèse il en résulte alors que la famille $\{x_t\}_{t\in I}$ est sommable pour $\| \ . \ \|$.

(2) Donnons-nous $w \in X$ tel que $\{x_t\}_{t\in I}$ soit sommable $\| \ . \ \|$ de somme w. Notons $c = \| \sum_{t\in I} x_t \ \|$. Selon les hypothèses on sait que $0 \leq c \in \mathbb{R}$ avec
$\| \sum_{t\in K} x_t \ \| \leq c \ \forall K \in \mathcal{F}(I)$. Désignons par S la suite généralisée engendrée par $\{x_t\}_{t\in I}$ donc $S_K = \sum_{t\in K} x_t \ \forall K \in \mathcal{F}(I)$. La famille $\{x_t\}_{t\in I}$ étant sommable pour $\| \ . \ \|$ de somme w, on conclut que $S \xrightarrow{\|.\|} w$, d'où par la continuité de la norme, la suite généralisée engendrée par $\{\| \ x_t \ \|\}_{t\in I}$ converge vers $\| \ w \ \|$.

Mais si $K \in \mathcal{F}(I)$ nous savons que $0 \leq \| S_K \| = \| \sum_{t\in K} x_t \| \leq \sum_{t\in K} \| x_t \| \leq c$.

Ainsi $\| w \| \leq \sum_{t\in K} \| x_t \|$.

Proposition 3.10.

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(.|.)$ un semi produit scalaire sur X et I un ensemble non vide. Désignons par $\| \ . \ \|$ la semi-norme de $(.|.)$ et notons $E = \ell_2(I, X, (.|.)) = \ell_2(I, X, \| \ . \ \|)$ l'ensemble des fonctions $f : I \to X$ pour lesquelles la famille $\{\| f_t \|^2 : t \in I\}$ est sommable dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$ posons $(f|g)_2 = \sum_{t\in I} (f_t|g_t)$. Alors $(.|.)_2$ est un semi produit scalaire sur E.

Preuve :

(1) E est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ et la fonction $\| f \|_2 = \sqrt{\sum_{t\in I} \| f_t \|^2}$ définit une semi-norme sur $\ell_2(I, X, \| \ . \ \|)$.

(2) L'application $(.|.)_2 : XxX \to X$ est bien définie. En effet, soient $f, g \in X$ alors les familles $\{\| f_t \|^2 : t \in I\}$ et $\{\| g_t \|^2 : t \in I\}$ sont sommables dans $\mathbb{R}$, de même la famille $\{\| f_t \|^2 + \{\| g_t \|^2 : t \in I\}$ est sommable dans $\mathbb{R}$. Or, $\forall t \in I$ nous avons

$0 \leq (\| f_t \| - \| g_t \|)^2 = \| f_t \|^2 - 2 \| f_t \| . \| g_t \| + \| g_t \|^2$ ce qui implique

$0 \leq \| f_t \| . \| g_t \| \leq \frac{1}{2}(\| f_t \|^2 + \| g_t \|^2)$ et donc en appliquant Cauchy-Schwarz

$0 \leq |(f_t|g_t)| \leq \| f_t \| . \| g_t \| \leq \frac{1}{2}(\| f_t \|^2 + \| g_t \|^2)$.

Ainsi, d'après le test de comparaison la famille $\{|(f_t|g_t)|\}_{t\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$. Donc d'après le critère de sommabilité d'une famille numérique la famille $\{(f_t|g_t)\}_{t\in I}$ est sommable dans $\mathbb{F}$, ce qui signifie que $(f|g)_2 \in \mathbb{F}$.

(3) Une simple application des opérations sur les familles sommables montre que

$(f + g|h)_2 = (f|h)_2 + (g|h)_2$ et $(cf|g)_2 = c.(f|g)_2$ pour $c \in \mathbb{F}$ et $f, g \in E$.

(4) Soit $f \in E$. Alors $\{\| f_t \|^2\}_{t\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $\sum_{t\in I} \| f_t \|^2$ est un réel ≥ 0. D'où $(f|f)_2 = \sum_{t\in I} (f_t|f_t) = \sum_{t\in I} \| f_t \|^2$ est un réel ≥ 0.

(5) Soit $f, g \in E$. Notons $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des parties finies de I. Pour $K \in \mathcal{F}(I)$ définissons $a_k = \sum_{t\in K} (f_t|g_t)$, $b_k = \sum_{t\in K} (g_t|f_t)$ de sorte de $b_k = \overline{a_k}$. Les suites généralisées $(a_K, K \in \mathcal{F}(I), \subset)$ et $(b_K, K \in \mathcal{F}(I), \subset)$ convergent respectivement vers $\sum_{t\in I} (f_t|g_t)$ et $\sum_{t\in I} (g_t|f_t)$. Puisque la fonction $h(z) = \overline{z}$ est continue de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{F}$, il en résulte que

$\overline{\sum_{t\in I}(f_t|g_t)} = h(\sum_{t\in I}(f_t|g_t)) = lim(h(a_K), K \in \mathcal{F}(I), \subset) = lim(\overline{a_K}, K \in \mathcal{F}(I), \subset$ $) = lim(b_K, K \in \mathcal{F}(I), \subset) = \sum_{t\in I}(g_t|f_t)$. Ce qui signifie précisement $\overline{(x|g)_2} = (g|f)_2$.

Il découle de (1), (2), (3), (4) et (5) que $(.|.)_2$ définit un semi produit scalaire sur E.

(6) Supposons (.|.) un produit scalaire sur X. Soit $f \in E$ avec $(f|f)_2 = 0$. Clairement $(f|f)_2 = \| f \|_2^2$ donc $\| f \|_2^2 = 0$ et ainsi $\| f \|_2 = 0$; puisque $\| f \|_2$ est une norme il en résulte $f = 0$. Ce qui signifie que $(.|.)_2$ est un produit scalaire sur E.

(7) Désignons par r la semi-norme de $(.|.)_2$. Alors pour $f \in E$ nous aurons $(r(f))^2 = (f|f)_2 = \sum_{t\in I}(f_t|f_t) = \sum_{t\in I} \| f_t \|^2$ d'où $r(f) = \| f_t \|_2$. Ce qui montre que r coincide avec la semi-norme $\| . \|_2$.

Si nous prenons $X = \mathbb{F}$ et $(a|b)$, le produit scalaire usuel de $\mathbb{F}$, nous voyons donc, comme cas particulier, que $\ell_2(I, \mathbb{F}, (.|.))$ est un espace Hilbertien sur $\mathbb{F}$ pour le produit scalaire $(f, g)_2 = \sum_{t\in I} f_t.\overline{g_t}$.

Proposition 3.11.
Soit $(X, \| . \|)$ un espace vectoriel normé. Si $\{x_t\}_{t\in I}$ est une famille sommable de X, alors l'ensemble $D = \{t \in I : x_t \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Preuve.
D'après la définition de famille sommable, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un sous-ensemble fini J_n de I, tel que pour tout sous-ensemble fini L$\subset I - J_n$ on ait $\| \sum_{t\in L} x_t \| < \frac{1}{n}$. En particulier, pour tout x_t, $t \in I - J_n$ on a $\| x_t \| < \frac{1}{n}$.

D'autre part, $D = \bigcup_{t\geq n}\{t \in I : \| x_t \| \geq \frac{1}{n}\}$; en effet, si $t \in I$ tel que $x_t \neq 0$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\| x_t \| \geq \frac{1}{n_0}$ i.e. $t \in \{t \in I : \| x_t \| \geq \frac{1}{n}\}$. Finalement, $D \subset \bigcup_{n\geq n} J_n$ est au plus dénombrable car contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles finis.

3.2 Bases hilbertiennes

Les espaces de Hilbert admettent des bases spécifiques généralisant la notion de bases algébriques.

Définition 3.12 (Famille totale).

Soit $(X, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert et $\{e_t\}_{t\in I}$ une famille d'éléments de X. On dit que la famille $\{e_t\}_{t\in I}$ est totale dans X si le sous-espace vectoriel M de X engendré par $\{e_t\}_{t\in I}$ est dense dans X, c'est-à-dire $\overline{M} = X$.

Proposition 3.13 (Critère de densité dans un espace hilbertien).
Soit $(X, (.|.))$ un espace Hilbertien sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et M un sous-espace vectoriel de X. Alors M sera dense dans X si et seulement si θ (le neutre de X) est le seul vecteur de X qui soit orthogonal à M, c'est-à-dire si set seulement si $M^{\perp} = \{\theta\}$, ou encore si et seulement si $\forall x(x \in X \,\text{et}\, x \perp M \implies x = \theta)$.

Preuve.
En effet, si M est dense dans X alors y est orthogonal à M implique qu'il est orthogonal à X tout entier dont y lui - même c'est-à-dire $(y|y) = 0$ et donc $y = \theta$. Réciproquement (par contraposée) si M n'est pas dense dans X alors $\overline{M}$ est un fermé différent de X, si $y \notin \overline{M}$, notons $P_F(y)$ sa projection sur $\overline{M}$ alors $y - P_F(y) \neq \theta$ et est orthogonal à M c'est-à-dire $M^{\perp} \neq \{\theta\}$.

Définition 3.14 (Bases hilbertiennes).
Soit $(X, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien sur le corps $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\{e_t\}_{t\in I}$ une famille d'éléments de X. On dit que la famille $\{e_t\}_{t\in I}$ est une base hilbertienne de X (ou une base orthonormée de X) si :

1. $\{e_t\}_{t\in I}$ est une famille orthonormée de X.
2. $\{e_t\}_{t\in I}$ est totale dans X.

Proposition 3.15. Dimension d'un espace de Hilbert
Dans un espace de Hilbert deux bases hilbertiennes sont équipotentes. Leur cardinal s'appelle la dimension hilbertienne de l'espace de hilbert.

Preuve : Elle peut être trouvée dans [12].

Remarque 3.16.

— Si I est un ensemble dénombrable, l'espace de Hilbert est dit séparable. On distingue deux cas :
  — X est de dimension finie c'est-à-dire I est un ensemble fini. Dans ce cas, X est un espace euclidien ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ou hermitien ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$), toute base hilbertienne est une base au sens algébrique. Le système orthonormé $\{u_i\}_{i\in I}$ étant libre et ayant le même nombre d'éléments que la base $\{e_i\}_{i\in I}$ est aussi une base hilbertienne de X. Notons qu'une base au sens algébrique est une base hilbertienne s'elle est orthonormée.
  — Dans le second cas, I est un ensemble infini dénombrable. Dans ce cas, la condition $\sum_{i\in I} \| u_i - e_i \|^2 < \infty$ équivaut à dire que la série $\sum_{i\in I} \| u_i - e_i \|^2$ est convergente.

— Si I est un ensemble infini non dénombrable, l'espace de Hilbert $(X,(.|.))$ est dit non séparable ou quelconque.
Un exemple classique d'un espace de Hilbert non separable est :
l'espace $\ell^2(I,\mathbb{C}) = \{\{x_i\}_{i\in I} : x_i \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty\}$.
La condition $\sum_{i\in I} \| u_i - e_i \|^2 < \infty$ équivaut à dire que la famille $\{\| u_i - e_i \|^2\}_{i\in I}$ est sommable (on dit aussi que la famille $\{u_i - e_i\}_{i\in I}$ est carrée sommable).

Théorème 3.17 (Caractérisations des bases hilbertiennes dans un espace hilbertien).
On se donne un espace hilbertien $(X,(.|.))$ sur $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de norme $\| . \|$ ainsi qu'une famille orthonormale $\{e_t\}_{t\in I}$ dans X. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) Le sous-espace vectoriel M de X engendré par $\{e_t\}_{t\in I}$ est dense dans X.
(2) $\{e_t\}_{t\in I}$ n'est pas incluse proprement dans un ensemble orthonormal de X.
(3) Si $u \in X$ avec $(u|e_t) = 0\ \forall t \in I$, alors $u = \theta$.
(4) $\forall u \in X$, la famille $\{(u|e_t)e_t\}_{t\in I}$ est sommable pour $\| . \|$ de somme u, $u = \sum_{t\in I}(u|e_t)e_t$.
(5) $\forall u, v \in X$, la famille $\{(u|e_t).\overline{(v|e_t)}\}_{t\in I}$ est sommable dans $\mathbb{F}$ de somme $(u|v)$; $(u|v) = \sum_{t\in I}(u|e_t)\overline{(v|e_t)}$.
(6) $\forall u \in X$, $\{|(u|e_t)|^2\}_{t\in I}$, est sommable dans $\mathbb{R}$ de somme $\| u \|^2$, $\| u \|^2 = \sum_{t\in I} |(u|e_t)|^2$.
(Identité de Parseval).
Donc, chacune de ces affirmations est équivalente à l'énoncé suivant : $\{e_t\}_{t\in I}$ est une base hilbertienne de X.

Preuve : Elle peut être trouvée dans [3]

4 Construction d'une base hilbertienne par peturbation d'une autre

Théorème 4.1.
Soient $(X,(.|.))$ un espace hilbertien de norme $\| . \|$, $\{e_i\}_{i\in I}$ une base hilbertienne de X avec I un ensemble quelconque. Toute famille orthonormale $\{u_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne de X si

$$\sum_{i\in I} \| u_i - e_i \|^2 < \infty. \tag{2}$$

Preuve :
1. Considérons le cas élémentaire où I est un ensemble quelconque fini.
Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une base hilbertienne de X alors, d'après le théorème de caractérisation d'une base hilbertienne, on a $\forall x \in X$,

$$x = \sum_{i\in I}(x|e_i)e_i, \tag{3}$$

c´est-à-dire que $\{e_i\}_{i\in I}$ est une famille génératrice de X. De plus, $\{e_i\}_{i\in I}$ étant orthonormée, on sait que $\{e_i\}_{i\in I}$ est libre dans X. Ainsi, $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base algébrique de l'espace vectoriel X.
Etant donné que $\{u_i\}_{i\in I}$ est un système orthonormé de X, il est donc libre dans X. Ainsi, ayant le même nombre d'éléments que $\{e_i\}_{i\in I}$ qui est une base algèbrique de X, on conclut que $\{u_i\}_{i\in I}$ est nécéssairement un système générateur de X c'est-à-dire $\forall x \in X$, il existe une suite $(a_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{F}$ tel que $x = \sum_{i\in I} a_i u_i$.
Pour que $\{u_i\}_{i\in I}$ soit une base hilbertienne, il suffit de montrer que $\forall i \in I, a_i = (x|u_i)$.
En effet, posons $(x|u_i) = c_i$. Par définition, on sait que $\sum_{i\in I} c_i u_i$ est la projection orthogonale de x sur l'espace engendré par $\{u_i\}_{i\in I}$, noté E_2. De plus, sa distance à x est la plus courte distance entre n'importe quel autre élément de E_2 et x. Donc, $|x - \sum_{i\in I} c_i u_i| \leq |x - \sum_{i\in I} a_i u_i|$.
Or $|x - \sum_{i\in I} a_i u_i| = 0$, donc $|x - \sum_{i\in I} c_i u_i| = 0$ ce qui implique $x = \sum_{i\in I} c_i u_i$.
Dès lors, le théorème de caractérisation d'une base hilbertienne implique que $\{u_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne de X.
2. I est un ensemble infini quelconque.

$\forall i \in I \quad (x|e_i)u_i = (x|e_i)e_i - (x|e_i)(e_i - u_i)$ ou $(x|e_i)(e_i - u_i) = (x|e_i)e_i - (x|e_i)(u_i)$

En posant $Kx = \sum_{i\in I}(x|e_i)(e_i - u_i)$ et $Tx = \sum_{i\in I}(x|e_i)u_i$

on a $Kx = \sum_{i\in I}(x|e_i)e_i - Tx = x - Tx$ car $x = \sum_{i\in I}(x|e_i)e_i$.

Montrons d'abord que $K : X \to X$, $x \mapsto Kx$ est une application linéaire et continue sur X pour la norme du produit scalaire.
2.1) K est bien définie. En effet, $\forall x \in X$, $\forall i \in I$ nous avons

$0 \leq |(x|e_i)| \parallel e_i - u_i \parallel \leq \frac{1}{2}(|(x|e_i)|^2 + \parallel e_i - u_i \parallel^2)$.

Or les familles $\{|(x|e_n)|^2\}_{n\in I}$ et $\{\parallel e_i - u_i \parallel^2\}_{n\in I}$ sont sommables dans $\mathbb{R}$ et donc par application de la proposition 3.4 la famille $\{\frac{1}{2}(|(x|e_i)|^2 + \parallel e_i - u_i \parallel^2)\}_{i\in I}$

est sommable dans $\mathbb{R}$. D'où le critère de comparaison implique que la famille $\{|(x|e_n)|. \parallel e_i - u_i \parallel\}_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et le corollaire 3.9 nous permet de conclure que la famille $\{(x|e_n).(e_i - u_i)\}_{i\in I}$ est sommable dans X pour la norme du produit scalaire.

Ce qui signifie que $Kx = \sum_{i\in I}(x|e_i)(e_i - u_i) \in X$ et K est bien définie.

On définit ainsi, une application $K : X \longrightarrow X$ par $Kx = \sum_{n\in I}(x|e_n)\,(e_n - u_n)$ $\forall x \in X$.

2.2) K est linéaire. Soient $x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. D'après la proposition 3.4, les familles $\{(x|e_i)(e_i - u_i)\}_{i\in I}$ et $\{(y|e_i)(e_i - u_i)\}_{i\in I}$ étant sommables sur X pour la norme du produit scalaire alors la famille $\{\alpha.(x|e_i)(e_i - u_i) + \beta.(y|e_i)(e_i - u_i)\}_{i\in I}$ est aussi sommable sur X pour la même norme et $\sum_{i\in I}(\alpha.x + \beta.y|e_i)(e_i - u_i) =$ $\sum_{i\in I}[\alpha.(x|e_i)(e_i-u_i)+\beta.(y|e_i)(e_i-u_i)] = \alpha.\sum_{i\in I}(x|e_i)(e_i-u_i)+\beta.\sum_{i\in I}(y|e_i)(e_i-u_i)$ c'est-à-dire $K(\alpha.x + \beta.y) = \alpha.Kx + \beta.Ky$ ce qui implique que K est linéaire.

2.3) K est continue. Soit $x \in X, J \in \mathcal{F}(I)$

$$\begin{aligned} \parallel \sum_{i\in J}(x|e_i)(e_i - u_i) \parallel &\leq \sum_{i\in J}|(x|e_i)| \parallel (e_i - u_i) \parallel \\ &\leq \left(\sum_{i\in J}|(x|e_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i\in J} \parallel (e_i - u_i) \parallel^2\right)^{\frac{1}{2}} = r. \parallel x \parallel \end{aligned}$$

avec $r^2 = \sum_{i\in J} \parallel (e_i - u_i) \parallel^2$ réel > 0.

D'où la suite généralisée $\left(\parallel \sum_{i\in J}(x|e_i)(e_i - u_i) \parallel, J \in \mathcal{F}(I), \subset\right)$ est majorée dans $[0, +\infty[$ par $r. \parallel x \parallel$ et donc $\sup_{J\in\mathcal{F}(I)} \parallel \sum_{i\in J}(x|e_i)(e_i - u_i) \parallel = \parallel \sum_{i\in I}(x|e_i)(e_i - u_i) \parallel \leq r. \parallel x \parallel$ c'est-à-dire pour tout $x \in X$, $\parallel Kx \parallel \leq r. \parallel x \parallel$. Donc K est continue sur X pour la norme du produit scalaire.

2.4) K est un opérateur de Hilbert Schmidt car

$$\sum_{i\in I} \parallel Ke_i \parallel^2 = \sum_{i\in I} \parallel e_i - u_i \parallel^2 < \infty.$$

Comme tout opérateur de Hilbert Schmidt est un opérateur compact donc K est compact.

2.5) $T = id_X - K$, où $id_X : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto id_X(x) = x$, on a T est bien définie, linéaire et continue car $id_X, K \in LC(X, X)$ qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$.

$$\begin{aligned} Tx = x - Kx &= \sum_{n\in I}(x|e_n)e_n - \sum_{n\in I}(x|e_n)(e_n - u_n) \\ &= \sum_{n\in I}(x|e_n)e_n - \sum_{n\in I}(x|e_n)e_n + \sum_{n\in I}(x|e_n)u_n = \sum_{n\in I}(x|e_n)u_n. \end{aligned}$$

Nous devons montrer que la famille $\{u_i\}_{i\in I}$ est une famille génératrice.

Observons que par application de l'inégalité de Parseval (dans la deuxième égalité)

$\| Tx \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x|e_i)|^2 = \| x \|^2$ c'est-à-dire T est une isométrie de X et ainsi T est injectif.

En plus, K étant compact et $T = I - K$ avec $Ker\, T = \{\theta\}$ (car T injectif), on peut appliquer le théorème 2.8 (3) pour conclure que T est inversible (surjectif) ; et donc T est unitaire.

Finalement, $Te_i = \sum_{j=1}^{\infty}(e_j|e_i)u_j = u_i \quad \forall i \in I$. D'où T étant un opérateur unitaire et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne, on sait que $\{Te_i\}_{i\in I} = \{u_i\}_{i\in I}$ est une famille génératrice et donc une base hilbertienne.

Exemple 4.2.
Nous considérons l'espace des fonctions $L^2[-1, 1]$ des fonctions carrées intégrables sur l'intervalle [-1,1] à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la base de Fourier :
$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_{2n-1}(x) = \cos(n\pi x)$, $e_{2n}(x) = \sin(n\pi x)$ pour $n \geq 1$ et construisons la famille orthonormée $\{u_n\}$ comme suit en posant $\theta_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ $n \geq 0$:
$u_{2n}(x) = \cos\theta_n.e_{2n}(x) + \sin\theta_n.e_{2n+1}(x)$, $u_{2n+1}(x) = -\sin\theta_n.e_{2n}(x) + \cos\theta_n.e_{2n+1}(x)$ pour $n \geq 0$.
On a,
pour n=2k :
$\| e_{2k} - u_{2k} \|^2 = \| e_{2k} - (\cos\theta_k.e_{2k} + \sin\theta_k.e_{2k+1}) \|^2$
$= \| (1 - \cos\theta_k)e_{2k} - \sin\theta_k e_{2k+1} \|^2 = (1 - \cos\theta_k)^2 - \sin^2\theta_k = 2 - 2.\cos\theta_k$
pour n=2k+1
$\| e_{2k+1} - u_{2k+1} \|^2 = \| e_{2k+1} - (-\sin\theta_k.e_{2k} + \cos\theta_k.e_{2k+1}) \|^2$
$= \| (1 - \cos\theta_k)e_{2k+1} + \sin\theta_k e_{2k} \|^2 = (1 - \cos\theta_k)^2 + \sin^2\theta_k = 2 - 2.\cos\theta_k.$
On rappelle qu'avec $\theta_n = \frac{1}{(1+n)^2}$ et n tendant vers ∞
$\cos\theta_n = 1 - \frac{\theta_n^2}{n^2} + o(\frac{\theta_n^2}{n^4}) = 1 - \frac{1}{2(n+1)^4} + o(\frac{1}{n^8})$
Donc, en posant k= la partie entière de $\frac{n}{2}$, $\| e_n - u_n \|^2 = 2 - 2\cos\theta_k = \frac{1}{(k+1)^4} + o(\frac{1}{n^8})$

qui tend vers 0 quand n tend vers ∞. D'où $\sum_{n\geq 0} \| e_n - u_n \|^2 < \infty$.
On peut donc conclure, d'après le théorème 4.1, la famille $\{u_n\}_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2[-1,1]$.

Nous donnons un contre-exemple pour montrer que la condition énoncée dans le théorème ci-dessus n'est pas nécessaire.

Contre-exemple 4.3.
Soit $X = \ell_2$, l'espace des suites des nombres complexes carrées sommables, muni du produit scalaire $(x|y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.\overline{y_n}$ avec $x, y \in \ell^2$, $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1}$.
Nous considérons la base hilbertienne $\{e_t\}_{t\geq 1}$ de X définie comme ci-dessous
$\forall t \geq 1,\ e_t = (e_i^t)_{i\geq 1},\ e_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si } i = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Considérons la famille $\{u_t\}_{t\geq 1}$ définie comme suit :

. $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, ...)$

. $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, ...)$

. $u_3 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, ...)$

. $u_4 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, ...)$ ... etc

C'est-à-dire pour tout $t \geq 1$,

$$u_{2t-1}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad k = 2t-1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad k = 2t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{ou} \quad u_{2t}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad k = 2t-1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad k = 2t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$\{u_t\}_{t\geq 1}$ est une base de X. En effet,

a) Elle est orthonormée. En effet,
$\forall i \geq 1, \| u_i \| = \sum_{j\geq 1} u_i^j.\overline{u_i^j} = \frac{1}{\sqrt{2}}^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1$, aussi $\forall i \neq j$, $(u_i|u_j) = 0$.

b) $\{u_i\}_{i\geq 1}$ est également totale, seule la suite nulle θ de ℓ^2 est orthogonale à tous les éléments de X.

On voit aussi clairement que la famille $\{e_i - u_i\}_{i\geq 1}$ n'est pas carreé sommable puisque $\sum_{t=1}^{+\infty} \| e_t - u_t \|^2 = +\infty$.

Remarque concluante

Etant donnée une base hilbertienne $\{e_i\}_{i\in I}$ d'un espace hilbertien X, nous avons étendu les résultats de Kato Tosio [13] en montrant que toute perturbation $\{u_i\}_{i\in I}$ de la base de depart vérifiant $\sum_{i\in I} \| e_i - u_i \|^2 < \infty$, demeure une base hilbertienne de X. Nous avons enfin donné un contre exemple pour montrer que cette condition n'est pas nécessaire en perturbant la base canonique de ℓ_2.

Références

Références

[1] Aziz El Kacimi Alaoui, Eléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle, Ellipses, Paris 1999.

[2] Daniel Li, Cours d'analyse fontionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses, 2013.

[3] De Pierre Colmez. Eléments d'analyse et d'algèbre (de théorie des nombres). Editions de l'Ecole Polytechnique, 2011.

[4] E. Schrodinger, Quantisierung als Eingenwert problem, Ann. Physik, 385:437-90, 1926.

[5] Francis Hirsch et Gilles Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle, Masson,Paris, 1997.

[6] Gustave Choquet, Cours d'Analyse, Masson.

[7] J. W. Strutt (Lord Rayleigh), Theory of sound, Macmilan, second edition, 1894.

[8] Haim Brezis Analyse fonctionnelle - Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[9] Kôsaku Yoshida, Functional analysis, Springer-Verlag, 1980.

[10] Mourad Choulli, Analyse fonctionnelle : Cours et exercices corrigés, Licence, Master, Ecoles d'ingénieurse, De Boeck supérieur, 2022.

[11] Stéphane Gonnord et Nicolas Tosel Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, Paris 1997.

[12] Suhubi Erdogan S. Functional analysis. Kluwer academic publishers, 2003.

[13] Tosio Kato. Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.

[14] Walter Rudin, Real and complexe analysis, Third Edition, Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1987.