JOURNAL AFRICAIN DES SCIENCES
VOL. 3, **11** (2026) 168-188

https://jafrisci.org

ISSN (online) : 3107-0949 ; ISSN (print) : 3107-0930

OPEN ACCESS

ARTICLE DE RECHERCHE

Article Info.:
Reçu : le 09/06/2026
Accepté : le 15/10/2026
Publié : le 19/10/2026

MODÉLISATION STOCHASTIQUE MULTI-ÉCHELON STRUCTURÉE PAR ÂGE DE LA CHAÎNE D'APPROVISIONNEMENT DES VACCINS CONTRE LA ROUGEOLE EN RÉPUBLIQUE DÉMOCRATIQUE DU CONGO : FORMULATION MARKOVIENNE ET SIMULATION MONTE CARLO

Germain Bolemole Lofutu [1,*], Leader Ontshick Lawanga [1,2], Papy Aikiafa Bongeli [1], Junior Nsumbu Ndombasi [3], Eddy Phongi Kimba [1], Joseph-Désiré Kyemba Bukweli [1], Rostin Makengo Matendo Mabela [1]

https://doi.org/10.70237/jafrisci.2026.v3.i11.16

Résumé

En République Démocratique du Congo (RDC), la couverture par la première dose de vaccin contre la rougeole est restée comprise entre 52 % et 65 % de 2019 à 2024, et les défaillances de la chaîne d'approvisionnement y contribuent fortement. Cette étude propose un modèle stochastique multi-échelon (dépôt central, 26 dépôts provinciaux, zones de santé, centres de vaccination) dans lequel le stock est structuré par âge, la demande suit une loi binomiale négative modulée par la saison et par un régime épidémique markovien, et les délais sont aléatoires et bornés. Nous démontrons l'existence du processus contrôlé, sa propriété de Markov homogène, l'existence d'une politique optimale, la convergence de l'itération sur les valeurs et une condition explicite de non-péremption. Calibré sur les données du Programme Élargi de Vaccination (2020-2025), le modèle compare quatre politiques de réapprovisionnement par simulation Monte Carlo. La coordination multi-échelon fondée sur la position de stock porte le taux de service national de 74,7 % à 97,7 %, réduit les pertes de 9,5 % à 0,4 % et diminue le coût logistique de 75,6 %. Les performances se dégradent avec le délai d'acheminement, et les capacités de stockage sont saturantes dans 25 provinces sur 26.

Mots-clés: Modélisation stochastique, Système multi-échelon, Stock périssable structuré par âge, Processus de décision markovien, Vaccin contre la rougeole, République Démocratique du Congo

Abstract

In the Democratic Republic of the Congo (DRC), coverage with the first dose of measles-containing vaccine remained between 52% and 65% from 2019 to 2024, and supply chain failures are a major contributing factor. This study proposes a multi-echelon stochastic model (central store, 26 provincial stores, health zones, vaccination centres) in which inventory is age-structured, demand follows a negative binomial law modulated by seasonality and by a Markovian outbreak regime, and lead times are random and bounded. We prove existence of the controlled process, its time-homogeneous Markov property, existence of an optimal policy, convergence of value iteration and an explicit no-expiry condition. Calibrated on Expanded Programme on Immunization data (2020-2025), the model compares four replenishment policies through Monte Carlo simulation. Multi-echelon coordination based on inventory position raises the national fill rate from 74.7% to 97.7%, reduces wastage from 9.5% to 0.4% and lowers logistics cost by 75.6%. Performance deteriorates with lead time, and storage capacities are binding in 25 of the 26 provinces.

Keywords: Stochastic modelling, Multi-echelon system, Age-structured perishable inventory, Markov decision process, Measles vaccine, Democratic Republic of the Congo

Correspondant : *germainlofutu@gmail.com* ***(G. B. Lofutu)***

Copyright : © The Author(s) Published under a Creative Commons Attribution 4.0 International Licence (CC BY 4.0)

[1] Département de Mathématiques, Statistiques et Informatique, Faculté des Sciences et Technologie, Université de Kinshasa, Kinshasa, République Démocratique du Congo
[2] Unité de Modélisation et Intelligence Epidémique, Département d'Epidémiologie et Santé globale, Institut Nationale de Recherche Biomédicale, Kinshasa, République Démocratique du Congo.
[3] Ecole de Santé Publique, Faculté de Médecine, Université de Kinshasa, Kinshasa, République Démocratique du Congo.

1. Introduction

1.1 Contexte et justification de l'étude

La vaccination est l'une des interventions de santé publique les plus efficaces pour prévenir les maladies infectieuses et réduire la mortalité, en particulier chez l'enfant [1]. La rougeole demeure pourtant un problème majeur dans plusieurs pays à faible revenu d'Afrique subsaharienne, où des résurgences épidémiques sont régulièrement observées malgré les progrès de la couverture vaccinale mondiale [1]. En République Démocratique du Congo (RDC), la situation est particulièrement préoccupante. L'épidémie de 2019-2020, qualifiée par l'Organisation mondiale de la Santé de « pire épidémie de rougeole au monde », a totalisé environ 310 000 cas suspects et plus de 6 000 décès [2]. Selon les estimations OMS-UNICEF (WUENIC), la couverture VCR1 est passée de 65 % en 2019 à 52 % en 2023, puis 55 % en 2024 [3]. Une analyse des enquêtes nationales confirme une baisse de 6,7 points de la couverture VCR1 entre 2017 et 2023 et une stagnation des progrès en matière d'équité après 2021 [4]. Ces chiffres traduisent une couverture insuffisante, mais aussi des défaillances persistantes de la chaîne d'approvisionnement : l'évaluation de la gestion des vaccins dans l'antenne PEV de Kisangani, par exemple, montre qu'aucun critère n'atteignait le seuil de 80 % et que le système logistique dysfonctionnait à tous les niveaux [5].

Le système logistique vaccinal congolais est soumis à plusieurs contraintes structurelles documentées par le PEV-RDC [6] et par les évaluations de terrain [5] :

- l'immensité du territoire et la dispersion des populations ;
- un réseau routier limité, complété par le transport fluvial et aérien ;
- les contraintes de la chaîne du froid (énergie, maintenance des équipements) ;
- des capacités de stockage insuffisantes ;
- l'instabilité sécuritaire de certains axes d'approvisionnement.

Le système repose sur une architecture multi-échelon : dépôt national, dépôts provinciaux (antennes), 519 zones de santé et centres de vaccination [6]. Les vaccins traversent donc plusieurs niveaux avant d'atteindre les populations cibles. Le vaccin rougeole-rubéole présélectionné par l'OMS se présente en flacons lyophilisés de 10 doses, avec une durée de conservation de 30 mois entre +2 et +8 °C ; une fois reconstitué, le flacon doit être jeté après 6 heures ou en fin de séance [7]. Le produit est donc périssable à deux échelles de temps.

Ce système est affecté par plusieurs aléas. Nous appelons *aléa* toute source de variabilité dont la réalisation ne peut être connue avec certitude au moment où la décision de réapprovisionnement est prise. Quatre aléas dominent :

- les fluctuations de la demande, liées à la fréquentation des séances, aux campagnes et aux ripostes ;
- les délais variables d'acheminement ;
- les interruptions logistiques (incidents de chaîne du froid, insécurité) ;
- la péremption, dont l'occurrence dépend de l'historique des flux.

Les approches déterministes, qui remplacent ces quantités par leur moyenne, ne peuvent représenter ni les ruptures provoquées par la variabilité, ni l'arbitrage entre stock de sécurité et péremption. La modélisation stochastique permet au contraire d'intégrer explicitement l'incertitude dans l'évaluation et l'optimisation des décisions [8, 9, 10].

1.2 Revue de la littérature

1.2.1 Approches déterministes

Deux familles de travaux déterministes portent sur la vaccination contre la rougeole. La première modélise la *dynamique de transmission* par des systèmes compartimentaux d'équations différentielles. Hethcote et Waltman [11] ont déterminé des calendriers de vaccination optimaux dans un modèle épidémique déterministe. Hethcote [12] a étudié l'âge optimal de vaccination contre la rougeole. Aldila et Asrianti [13] ont analysé un modèle avec vaccination imparfaite et quarantaine. Kuddus et al. [14] ont étudié la stabilité d'un modèle à double dose au Bangladesh. Pokharel et al. [15] ont distingué la transmission chez l'adulte et chez l'enfant. Ces modèles éclairent les objectifs de couverture, mais ils supposent que les doses sont disponibles et ne représentent pas la logistique.

La seconde famille, plus proche de notre objet, optimise la *conception et la planification des réseaux de distribution*. Chen et al. [16] ont proposé un modèle de programmation linéaire de planification du réseau OMS-PEV. Lim et al. [17] ont formalisé la planification des stratégies avancées. Lim et al. [18] ont traité la refonte des réseaux de distribution. Yang et al. [19] ont optimisé ces réseaux par programmation mixte en nombres entiers. Chen et al. [20] ont évalué les dispositifs de froid passif. Ces modèles déterministes sont adaptés aux décisions stratégiques (localisation, capacités), mais ils ignorent la variabilité de la demande et des délais, si bien qu'ils sous-estiment les ruptures et ne traitent pas la péremption comme un phénomène aléatoire dépendant de l'âge.

1.2.2 Approches stochastiques

La théorie des stocks périssables, synthétisée par Nahmias [8] puis par Karaesmen et al. [21], montre que la politique optimale d'un produit à durée de vie fixe dépend de toute la structure par âge du stock. La programmation dynamique stochastique a été appliquée à des produits sanguins à durée de vie courte, avec des structures d'état comparables à la nôtre [22]. Pour les systèmes multi-échelons, les travaux fondateurs de Clark et Scarf [23] introduisent la notion de stock d'échelon. Celle-ci est développée par Axsäter [24] et Zipkin [25]. Lee et al. [26] ont montré que l'information locale amplifie la variabilité en amont (effet coup de fouet). Lee et Billington [27] ont mis en évidence les pertes d'efficacité des chaînes décentralisées.

Pour les vaccins, la littérature stochastique est surtout fondée sur la simulation et sur les processus de décision markoviens :

- Simulation à événements discrets (modèle HERMES) :

  - effet de la taille des flacons de vaccin antirougeoleux sur la chaîne du Niger [28] ;
  - suppression du niveau régional au Niger [29] ;
  - refonte de la chaîne du Bénin [30] ;
  - arbitrage entre transport et stockage [31] ;
  - remplacement du flacon multidose de vaccin antirougeoleux en Thaïlande [32].
- Modèles économiques de Monte Carlo sur le choix entre flacons unidoses et multidoses [33] et sur la taille optimale des flacons [34].
- Quantités optimales de commande au niveau des centres de santé sous demande aléatoire [35].
- Processus de décision markoviens pour l'ouverture des flacons multidoses [36], étendus à une demande non stationnaire [37] et traduits en règles opérationnelles [38].
- Programmation stochastique multipériode des stratégies avancées [39].
- Décisions de transport sous chaîne du froid [40].

Les revues de Duijzer et al. [9] et de De Boeck et al. [10] soulignent toutefois deux lacunes : les modèles stochastiques multi-échelons intégrant explicitement la péremption restent rares, et les applications aux pays à faible revenu à grande échelle sont peu nombreuses. Le Tableau 1 positionne notre contribution.

Tableau 1 : Positionnement de l'étude dans la littérature (D : déterministe ; S : stochastique ; PRFI : pays à revenu faible ou intermédiaire ; PD : programmation dynamique)

Référence(s)	Approche	D/S	Multi-échelon	Âge / péremption	Délais aléatoires	Contexte
Hethcote & Waltman (1973) ; Hethcote (1988)	Modèle épidémique, contrôle optimal	D	–	–	–	Théorique
Aldila & Asrianti (2019) ; Kuddus et al. (2021) ; Pokharel et al. (2024)	Modèle compartimental	D	–	–	–	Indonésie, Bangladesh
Chen et al. (2014) ; Yang et al. (2021) ; Lim et al. (2022)	Programmation linéaire / mixte	D	Oui	–	–	PRFI (Niger, Bénin)
Lim et al. (2016) ; Chen et al. (2015)	Planification, froid passif	D	Oui	–	–	PRFI
Nahmias (1982) ; Karaesmen et al. (2011) ; Haijema et al. (2007)	Stocks périssables, PD stochastique	S	–	Oui	–	Théorique, sang
Clark & Scarf (1960) ; Axsäter (2015) ; Lee et al. (1997)	Multi-échelon, stock d'échelon	S	Oui	–	Partiel	Théorique
Assi et al. (2011, 2013) ; Brown et al. (2014) ; Haidari et al. (2013)	Simulation à événements discrets (HERMES)	S	Oui	Partiel	–	Niger, Bénin
Lee et al. (2010, 2011) ; Dhamodharan & Proano (2012)	Monte Carlo, taille des flacons	S	Partiel	Flacons ouverts	–	Thaïlande, PRFI
Rajgopal et al. (2011)	Commande optimale sous demande aléatoire	S	–	–	–	PRFI
Mofrad et al. (2014, 2016, 2018)	MDP, ouverture des flacons	S	–	Flacons ouverts	–	Cliniques
Yang & Rajgopal (2021) ; Lin et al. (2020)	Programmation stochastique ; transport froid	S	Partiel	–	Partiel	PRFI ; Chine
Présente étude	**MDP multi-échelon structuré par âge + simulation**	**S**	**Oui**	**Oui (stock et transit)**	**Oui**	**RDC, 26 provinces**

1.2.3 Lacune de recherche

À notre connaissance, aucun travail ne combine simultanément :

i. un réseau multi-échelon ;
ii. une représentation du stock structurée par âge avec gestion FEFO ;
iii. des délais aléatoires bornés ;
iv. une demande surdispersée modulée par un régime épidémique ;
v. des résultats théoriques sur le processus contrôlé ;
vi. une application aux 26 provinces de la RDC.

Le présent article vise à combler cette lacune.

1.3 Objectifs

Objectif général. Développer, analyser et appliquer un modèle stochastique multi-échelon structuré par âge permettant d'évaluer et d'optimiser les politiques de

réapprovisionnement des vaccins contre la rougeole en RDC.

Objectifs spécifiques.

1. Formaliser la structure du réseau logistique du PEV-RDC.
2. Modéliser la demande vaccinale aléatoire et en vérifier la loi.
3. Intégrer les délais logistiques aléatoires, les capacités de stockage et la péremption.
4. Construire le processus de décision markovien multi-échelon et en établir les propriétés.
5. Comparer, par simulation, des politiques de réapprovisionnement et identifier les goulots d'étranglement provinciaux.

1.4 Contributions

Sur le plan **méthodologique**, l'article propose une formulation multi-échelon dans laquelle l'âge des doses est suivi à la fois en stock et en transit. Les ordres de consommation et d'expédition (FEFO) sont explicités, ainsi que l'allocation différenciée par âge.

Sur le plan **théorique**, nous établissons six propriétés, dont une condition explicite de non-péremption (Proposition 6) qui relie délai, durée de vie résiduelle, temps de séjour au dépôt central et capacité.

Sur le plan **empirique**, le modèle est calibré pour les 26 provinces, sa procédure d'estimation est vérifiée et quatre politiques sont comparées avec des intervalles de confiance et des tests appariés.

Sur le plan **pratique**, l'étude fournit au PEV-RDC un outil d'aide à la décision reproductible, dont le code est mis à disposition.

1.5 Organisation de l'article

La section 2 présente les matériels et méthodes. La section 3 développe la formulation mathématique et ses propriétés théoriques. La section 4 décrit le plan d'expérience numérique et la démarche de vérification et de validation. La section 5 expose les résultats, discutés à la section 6. La section 7 conclut et ouvre des perspectives.

2. Matériels et méthodes

2.1 Cadre de l'étude

L'étude porte sur la période 2020-2025 et sur le réseau logistique du PEV-RDC, organisé en quatre niveaux hiérarchiques : dépôt central national, dépôts provinciaux, zones de santé et centres de vaccination (Fig. 1). La formulation mathématique (section 3) est générale et s'applique à un nombre quelconque de niveaux.

Faute de séries désagrégées au niveau des zones de santé, l'application numérique agrège les niveaux 3 et 4 au niveau provincial. Elle comporte donc deux échelons de stockage explicitement simulés (central et provincial), alimentés par un fournisseur international. Ce choix est discuté parmi les limites (section 6.4).

2.2 Source des données

Afin de garantir la cohérence des paramètres, **une source unique** a été retenue pour la calibration : les rapports annuels et les rapports de gestion des stocks du Programme Élargi de Vaccination (PEV-RDC) pour la période 2020-2025 [6]. Les variables extraites sont les suivantes :

- le nombre de doses distribuées ;
- la population cible ;
- les délais moyens d'approvisionnement par province ;
- les capacités de stockage en chaîne du froid.

Les données de surveillance épidémiologique et les estimations WUENIC sont utilisées uniquement pour décrire le contexte (section 1.1). Elles n'entrent dans aucune calibration.

Avant l'analyse, les données ont été vérifiées (cohérence entre niveaux, valeurs aberrantes, unités) et harmonisées à l'échelle hebdomadaire. Le Tableau 2 présente les paramètres provinciaux retenus. Les délais y sont exprimés en semaines, ce qui corrige une incohérence d'unités de la version initiale.

Tableau 2 : Paramètres provinciaux du modèle (source unique : PEV-RDC, rapports 2020-2025 ; $\boldsymbol{r_i}$: hypothèse de dispersion, section 3.4)

Province	Population cible (an)	λ_i (doses/sem.)	$\mathbb{E}[L_i]$ (sem.)	C_i (doses)	C_i/λ_i (sem.)	r_i
Kinshasa	52 000	1 100	1,8	8 000	7,3	40
Kongo Central	34 000	760	2,4	6 500	8,6	40
Kwango	22 000	480	5,3	4 100	8,5	25
Kwilu	26 000	540	4,9	4 300	8,0	25
Mai-Ndombe	18 000	390	6,7	3 400	8,7	15
Kasaï	29 000	620	4,5	5 100	8,2	25
Kasaï Central	28 000	570	4,8	5 000	8,8	25
Kasaï Oriental	25 000	520	4,4	4 800	9,2	25
Lomami	21 000	470	5,0	3 900	8,3	25
Sankuru	16 000	360	6,3	3 100	8,6	15
Maniema	20 000	450	5,7	3 500	7,8	25
Sud-Kivu	38 000	810	3,7	6 100	7,5	25

Province	Population cible (an)	λ_i (doses/sem.)	$\mathbb{E}[L_i]$ (sem.)	C_i (doses)	C_i/λ_i (sem.)	r_i
Nord-Kivu	39 000	840	3,4	6 200	7,4	25
Ituri	35 000	720	3,9	5 600	7,8	25
Haut-Uélé	19 000	410	5,9	3 600	8,8	25
Bas-Uélé	17 000	380	6,1	3 200	8,4	15
Tshopo	31 000	640	4,6	5 300	8,3	25
Mongala	16 000	340	6,5	3 000	8,8	15
Nord-Ubangi	15 000	320	6,9	2 900	9,1	15
Sud-Ubangi	17 000	370	6,2	3 100	8,4	15
Équateur	23 000	490	6,2	4 200	8,6	15
Tshuapa	14 000	300	7,0	2 700	9,0	15
Tanganyika	18 000	390	7,1	3 500	9,0	15
Haut-Lomami	20 000	430	5,5	3 800	8,8	25
Lualaba	27 000	560	4,1	4 900	8,8	25
Haut-Katanga	41 000	880	3,1	6 800	7,7	25
Total / moyenne	**661 000**	**14 140**	**5,1**	**116 600**	**8,4**	–

Note : les délais sont exprimés en semaines dans l'ensemble de l'article.

2.3 Logiciels et outils

La préparation des données a été réalisée sous R (version 4.6.1) avec les bibliothèques tidyverse, data.table et fitdistrplus. L'estimation, la simulation Monte Carlo, l'optimisation et la résolution exacte de l'équation de Bellman ont été programmées en Python 3 (NumPy, SciPy, pandas, Matplotlib). Toutes les expériences utilisent des graines aléatoires fixées. Le code complet, qui reproduit l'ensemble des tableaux et figures, est mis à disposition (voir la déclaration de disponibilité).

2.4 Hypothèses du modèle

Afin de rendre le problème mathématiquement traitable tout en conservant les caractéristiques essentielles du système, les hypothèses suivantes sont retenues.

H1 (Réseau). Le réseau est arborescent et fini : chaque site, hormis le dépôt central, est approvisionné par un unique site amont.

H2 (Temps). Le temps est discret ; une période correspond à une semaine logistique.

H3 (Demande). Conditionnellement à un régime épidémique markovien et à la saison, la demande hebdomadaire de chaque site suit une loi binomiale négative. La loi de Poisson en est un cas limite (absence de surdispersion).

H4 (Délais). Les délais d'acheminement sont des variables aléatoires discrètes, indépendantes, de loi connue et bornées par $\bar{L}_i$.

H5 (Péremption). Les doses ont une durée de vie résiduelle effective τ à leur réception au dépôt central. Elles sont consommées et expédiées selon la règle FEFO (*first expired, first out*), qui coïncide avec FIFO lorsque tous les lots ont la même date de fabrication.

H6 (Capacités). Les capacités de stockage C_i sont finies et connues.

H7 (Demande non servie). La demande non servie est perdue : elle correspond à une occasion de vaccination manquée et est pénalisée dans la fonction de coût.

H8 (Information). Les décisions sont prises à partir de l'état courant, qui contient toute l'information nécessaire à l'évolution future (propriété de Markov).

H9 (Coûts). Les coûts de stockage, de transport, de pénurie et de péremption sont positifs et bornés.

H10 (Actualisation). Le facteur d'actualisation vérifie $0 < \beta < 1$.

3. Formulation mathématique du modèle stochastique multi-échelon

3.1 Représentation du réseau logistique

Le réseau est représenté par un graphe orienté fini $G = (N, E)$, avec

$$\begin{aligned} N &= \{0,1,\dots,n\} = N_C \cup N_P \cup N_Z \cup N_V, \\ |N| &= n+1 < \infty \end{aligned} \tag{1}$$

où $N_C = \{0\}$ est le dépôt central, N_P l'ensemble des dépôts provinciaux, N_Z celui des zones de santé et N_V celui des centres de vaccination. L'ensemble N est **fini** : dans l'application, $|N_P| = 26$.

Pour tout $i \neq 0$, on note $\pi(i)$ son unique fournisseur (H1) et $\sigma(j) = \{i : \pi(i) = j\}$ l'ensemble des sites approvisionnés par j. L'ensemble des arcs est alors $E = \{(\pi(i), i) : i \in N \backslash \{0\}\} \subseteq N \times N$.

Chaque nœud i est caractérisé par :

- une capacité C_i ;
- un stock structuré par âge $X_i(t)$;
- un stock en transit $Y_i(t)$;
- une demande locale $D_i(t)$ (nulle pour les nœuds qui ne vaccinent pas) ;
- une politique de réapprovisionnement ;
- une loi de délai F_{L_i} sur l'arc $(\pi(i), i)$.

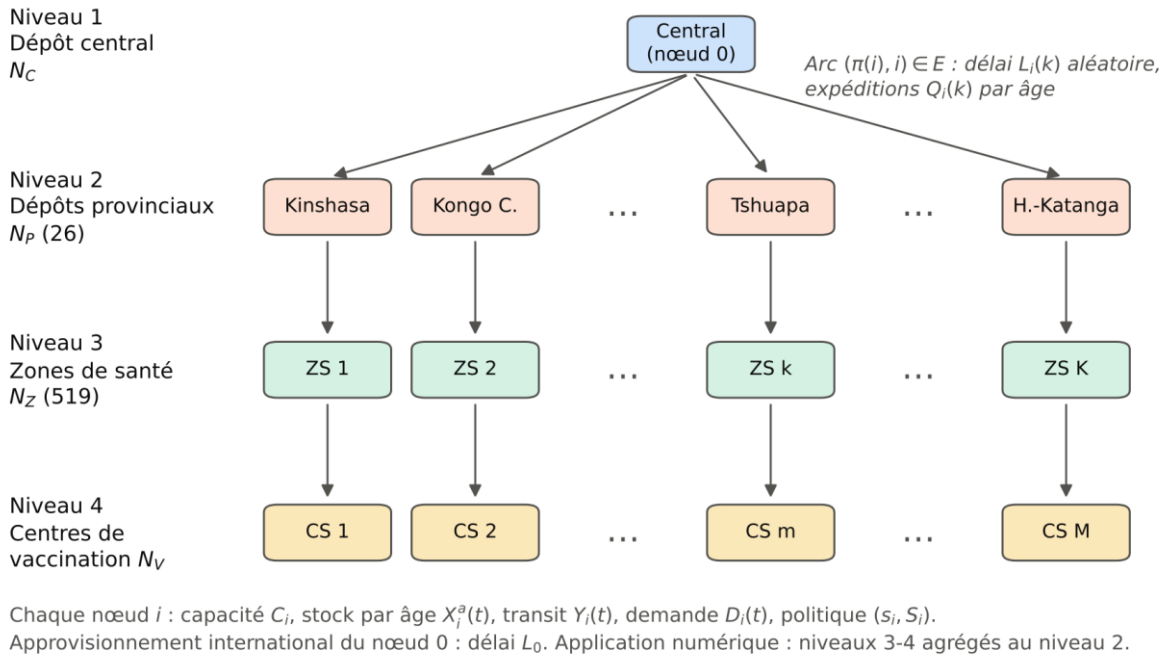


***Figure. 1**. Structure du réseau logistique multi-échelon de la chaîne d'approvisionnement des vaccins contre la rougeole en RDC et notations du modèle. Source : conception des auteurs, d'après l'organisation du PEV-RDC [6].*

3.2 Horizon temporel et unité de temps

Le modèle est formulé **directement en temps discret**. Il ne s'agit pas de la discrétisation d'un modèle continu : les décisions de commande, les livraisons et les rapports du PEV suivent un cycle hebdomadaire. On note $t \in \mathbb{T} = \{0,1,\dots,T\}$, où une unité correspond à une semaine. L'horizon d'évaluation couvre 2020-2025, soit $T = 312$ semaines, précédées de 52 semaines de mise en régime dans les simulations.

3.3 Chronologie intra-période

Au cours de chaque semaine t, les événements se succèdent dans l'ordre suivant :

i. réception des livraisons arrivant à échéance ;
ii. réalisation de la demande et consommation selon la règle FEFO ;
iii. incidents éventuels de chaîne du froid ;
iv. décisions de commande, puis expéditions par les sites amont ;
v. vieillissement d'une semaine du stock et du transit, et retrait des doses périmées.

Cette chronologie rend les équations ci-dessous non ambiguës.

3.4 Modélisation stochastique de la demande vaccinale

La demande n'est pas déterministe. Le nombre d'enfants à vacciner peut être estimé à partir des données démographiques, mais le nombre de doses effectivement demandées chaque semaine varie sous l'effet de facteurs démographiques (naissances, migrations), comportementaux (fréquentation des séances), organisationnels (séances avancées, ruptures antérieures) et épidémiologiques (ripostes). Les flambées sont représentées par un régime markovien $M_i(t) \in \{0,1\}$ (0 : normal, 1 : flambée), de matrice de transition

$$P_M = \begin{pmatrix} 1-p_{01} & p_{01} \\ p_{10} & 1-p_{10} \end{pmatrix}, \quad \pi_1 = \frac{p_{01}}{p_{01}+p_{10}} \tag{2}$$

Conditionnellement à $M_i(t)$, la demande suit une loi binomiale négative de moyenne $\mu_i(t)$ et de paramètre de taille r_i :

$$\begin{aligned} &D_i(t) \mid M_i(t) \sim \mathcal{NB}\big(r_i, \mu_i(t)\big), \\ &\mathbb{E}[D_i(t) \mid M_i(t)] = \mu_i(t), \\ &\mathrm{Var}[D_i(t) \mid M_i(t)] = \mu_i(t) + \mu_i(t)^2/r_i \end{aligned} \tag{3}$$

L'intensité combine une composante moyenne, une composante saisonnière et l'effet du régime :

$$\begin{aligned} \mu_i(t) = \; & \lambda_i^0 \left[1 + \alpha \cos \frac{2\pi(t-\varphi)}{52}\right] \\ & \times \big(1 + \rho\, M_i(t)\big), \\ \lambda_i^0 = \; & \frac{\lambda_i}{1+\rho\,\pi_1} \end{aligned} \tag{4}$$

Le terme entre crochets s'écrit $\lambda_i^0 + \lambda_i^s(t)$, avec $\lambda_i^s(t) = \alpha\lambda_i^0 \cos(2\pi(t-\varphi)/52)$ (composante saisonnière). Le choix de λ_i^0 garantit que la demande moyenne annuelle vaut λ_i (Tableau 2), puisque le terme saisonnier est de moyenne nulle sur 52 semaines. Lorsque $r_i \to \infty$ et $\rho = 0$, on retrouve le modèle de Poisson non stationnaire $D_i(t) \sim \mathcal{P}\left(\lambda_i^0 + \lambda_i^s(t)\right)$ de la version initiale. La surdispersion est plus forte dans les provinces enclavées : $r_i = 40$ si $\mathbb{E}[L_i] < 3$, $r_i = 25$ si $3 \le \mathbb{E}[L_i] < 6$, et $r_i = 15$ sinon.

3.5 Modélisation des délais logistiques

Le délai d'une expédition envoyée à la période k vers le site i est une variable aléatoire $L_i(k) \in \{1,\dots,\bar{L}_i\}$, indépendante des autres aléas (H4) :

$$\begin{aligned} L_i(k) &= \min\{1 + G_i(k),\ \bar{L}_i\}, \\ G_i(k) &\sim \mathcal{NB}(k_L,\ \mathbb{E}[L_i] - 1), \\ \bar{L}_i &= \lceil \mathbb{E}[L_i] \rceil + 3 \end{aligned} \tag{5}$$

Cette loi discrète, asymétrique à droite et bornée (notée F_{L_i}) reproduit les plages minimum-maximum historiques. Elle intègre les contraintes routières, le transport fluvial, l'insécurité, la disponibilité du carburant et de l'énergie. Pour le dépôt central, le délai d'approvisionnement international est $L_0 = 6 + G_0$, avec $G_0 \sim \mathcal{NB}(3,4)$ tronqué à 20 semaines.

3.6 Structure par âge et dynamique des stocks

Variables d'état. Soit $\mathcal{A} = \{0,1,\dots,\tau-1\}$ l'ensemble des âges, mesurés en semaines depuis la réception au dépôt central. On note :

- $X_i^a(t)$ le stock de doses d'âge a au site i au début de la semaine t, après réception ;
- $Y_i^{a,\ell}(t)$ les doses en transit vers i, d'âge courant a et de délai résiduel ℓ ;
- $X_i(t) = \left(X_i^0(t), \dots, X_i^{\tau-1}(t)\right)$ le vecteur des stocks par âge ;
- $\bar{X}_i(t) = \sum_a X_i^a(t)$ le stock physique total ;
- $Y_i(t) = \sum_{a,\ell} Y_i^{a,\ell}(t)$ le stock en transit total.

Consommation FEFO. Les doses les plus âgées sont utilisées en premier. La consommation d'âge a est donnée par

$$V_i^a(t) = \min\Big\{\ X_i^a(t),\ \left(D_i(t) - \sum_{b=a+1}^{\tau-1} X_i^b(t)\right)^+\Big\}, \quad a = \tau-1, \dots, 0 \tag{6}$$

où $x^+ = \max(x, 0)$. La consommation totale est $\bar{V}_i(t) = \min\{D_i(t), \bar{X}_i(t)\}$ et la demande non servie est $B_i(t) = \left(D_i(t) - \bar{X}_i(t)\right)^+$. L'équation (6) précise comment sont prises les classes d'âge : la demande est servie en parcourant les âges dans l'ordre décroissant, et une classe n'est entamée que lorsque toutes les classes plus âgées sont épuisées.

Incidents de chaîne du froid. Avec probabilité θ_i, un incident ($\xi_i(t) = 1$) détruit une fraction κ du stock restant : $K_i^a(t) = \kappa\, \xi_i(t)\left(X_i^a(t) - V_i^a(t)\right)$.

Expéditions. Le site j expédie à chaque site aval $i \in \sigma(j)$ un vecteur $O_i^a(t)$ de doses d'âge a, de total $Q_i(t) = \sum_a O_i^a(t)$, prélevé selon la règle FEFO (section 3.9).

Vieillissement. Le stock résiduel en fin de semaine est

$$R_i^a(t) = X_i^a(t) - V_i^a(t) - K_i^a(t) - \sum_{j \in \sigma(i)} O_j^a(t) \tag{7}$$

Il vieillit d'une semaine ; les doses atteignant l'âge τ sont périmées :

$$\begin{aligned} X_i^a(t+1) &= R_i^{a-1}(t) + A_i^a(t+1), \quad 1 \le a \le \tau-1, \\ X_i^0(t+1) &= A_i^0(t+1), \\ W_i^{\exp}(t) &= R_i^{\tau-1}(t) \end{aligned} \tag{8}$$

Arrivées. Une expédition envoyée en k avec l'âge a' arrive en $k + L_i(k)$ avec l'âge $a' + L_i(k)$. Le flux d'arrivée d'âge a en t s'écrit donc

$$\begin{aligned} A_i^a(t) &= \sum_{k<t} \mathbf{1}_{\{k+L_i(k)=t\}}\ O_i^{a-(t-k)}(k), \\ O_i^b &\equiv 0 \text{ si } b < 0 \end{aligned} \tag{9}$$

où $\mathbf{1}_{\{k+L_i(k)=t\}}$ vaut 1 si l'expédition de la période k est livrée en t, et 0 sinon. Les doses qui atteindraient l'âge τ pendant le transit sont comptées comme pertes en transit $W_i^{\mathrm{tr}}(t)$. Pour le dépôt central, $A_0^0(t) = \sum_{k<t} \mathbf{1}_{\{k+L_0(k)=t\}}\, U_0(k)$: l'horloge d'âge démarre à la réception.

Bilan agrégé. En sommant (7)-(8) sur les âges, on retrouve l'équation de conservation de la version initiale, désormais complètement spécifiée :

$$\begin{aligned} \bar{X}_i(t+1) = \ & \bar{X}_i(t) + \bar{A}_i(t+1) \\ & - \bar{V}_i(t) - \bar{O}_i(t) - W_i(t) \end{aligned} \tag{10}$$

avec $W_i(t) = W_i^{\exp}(t) + \bar{K}_i(t) + W_i^{\mathrm{tr}}(t) + \Omega_i(t)$ et $\bar{O}_i(t) = \sum_{j \in \sigma(i)} Q_j(t)$. Le terme $\Omega_i(t) = (\bar{X}_i(t) + \bar{A}_i(t) - C_i)^+$ désigne les doses qui, à l'arrivée, excèdent la capacité. Il est nul sous toute politique admissible (Proposition 1) ; il n'est positif que pour les règles de référence qui ignorent le transit.

3.7 Modélisation des pertes vaccinales

Les pertes totales $W_i(t)$ comprennent quatre composantes :

- la péremption en stock, $W_i^{\exp}$, qui est le retrait automatique des doses atteignant l'âge τ, de sorte que la classe τ est toujours vide ;
- la péremption en transit, W_i^{tr} ;
- les incidents de chaîne du froid, $\bar{K}_i$;
- le surstockage hors chaîne du froid, Ω_i.

Le taux de pertes d'un site sur l'horizon est

$$\mathrm{TP}_i = \frac{\sum_t W_i(t)}{\sum_t \left(\bar{V}_i(t) + W_i(t)\right)} \tag{11}$$

Les pertes liées aux flacons ouverts (règle des 6 heures) relèvent de l'échelle de la séance de vaccination ; elles sont incluses dans le facteur de perte implicite de λ_i et ne sont pas modélisées explicitement.

3.8 État global du système, décisions et admissibilité

Pour obtenir une chaîne homogène malgré la saisonnalité, on augmente l'état de la phase saisonnière $\phi(t) = t \bmod 52$. L'état global est

$$S(t) = \big(\ (X_i^a(t))_{i,a},\ (Y_i^{a,\ell}(t))_{i,a,\ell},\ (M_i(t))_i,\ \phi(t)\big) \in \mathcal{S} \tag{12}$$

La décision $U(t) = \left(U_i(t)\right)_{i \in N}$ est le vecteur des quantités commandées par chaque site à son fournisseur. Elle appartient à l'ensemble admissible

$$\mathcal{U}\big(S(t)\big) = \{\ u \in \mathbb{Z}_+^{n+1}: \ 0 \le u_i \le C_i - \mathrm{IP}_i(t),\ i \in N\} \tag{13}$$

où $\mathrm{IP}_i(t) = \bar{X}_i(t) - \bar{V}_i(t) - \bar{K}_i(t) + Y_i(t)$ est la **position de stock** (stock physique après consommation, augmentée du transit). Si les commandes agrégées excèdent la disponibilité amont, la quantité expédiée est rationnée proportionnellement, $\gamma_j(t)$ désignant le rapport entre le stock disponible au site j et les commandes qu'il reçoit :

$$Q_i(t) = U_i(t)\min\{1,\ \gamma_{\pi(i)}(t)\},$$
$$\gamma_j(t) = \frac{\bar{X}_j(t) - \bar{V}_j(t) - \bar{K}_j(t)}{\sum_{l\in\sigma(j)} U_l(t)} \quad (14)$$

3.9 Politiques de réapprovisionnement comparées

Politique (s,S) sur la position de stock. Au site i, la règle s'écrit

$$U_i(t) = \begin{cases} S_i - \mathrm{IP}_i(t) & \text{si } \mathrm{IP}_i(t) < s_i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (15)$$

avec $0 \le s_i < S_i \le C_i$, où s_i est le seuil critique (point de commande) et S_i le niveau cible. La version initiale appliquait cette règle au stock physique $\bar{X}_i(t)$. Or, dès que le délai dépasse une période, ignorer le transit conduit à des commandes redondantes : c'est la règle P1 ci-dessous, que nous retenons comme référence. Les paramètres sont recherchés dans la famille

$$s_i = \lambda_i(\mathbb{E}[L_i] + 1) + z_i\, c\, \lambda_i\sqrt{\mathbb{E}[L_i] + 1}, \quad S_i = \min\{C_i,\ s_i + q_i\lambda_i\} \quad (16)$$

avec $c = 0{,}30$, $z_i \in \{0; 0{,}5; \ldots; 3\}$ et $q_i \in \{1,2,3,4,6\}$ semaines.

Coordination multi-échelon. Le dépôt central commande toutes les 4 semaines au fournisseur international. Sa règle est fondée soit sur sa propre position de stock (pilotage installation par installation), soit sur sa **position d'échelon** $\mathrm{IP}_0^e = \mathrm{IP}_0 + \sum_{i\in\sigma(0)} \mathrm{IP}_i$ (pilotage par échelon, au sens de Clark et Scarf [23]).

Allocation différenciée par âge. Les lots les plus âgés sont affectés aux provinces dont le délai moyen est le plus court, et les lots les plus jeunes aux provinces enclavées. Sans allocation différenciée, chaque province reçoit la même composition par âge.

Quatre politiques sont comparées :

- **P0 (pratique de référence).** Règle min-max mensuelle sur le stock physique, avec $S_i = \min\{C_i, 5\lambda_i\}$, soit l'intervalle d'approvisionnement plus 25 % de stock de sécurité, et pilotage installation par installation.
- **P1.** Règle (s,S) hebdomadaire sur le stock physique ($s_i = \lambda_i\mathbb{E}[L_i]$, $S_i = \min\{C_i, s_i + 4\lambda_i\}$), sans nouvelle commande tant qu'une livraison est attendue.
- **P2a.** Règle (15)-(16) sur la position de stock, avec paramètres optimisés et pilotage installation par installation.
- **P2.** P2a, complétée par le pilotage par échelon du dépôt central et l'allocation différenciée par âge.

3.10 Fonction objectif et contraintes

Le coût instantané $g(S_t, U_t)$ se décompose en quatre termes :

$$g(S_t, U_t) = g_h(S_t) + g_p(S_t) + g_w(S_t) + g_t(U_t) \quad (17)$$

où :

- $g_h = \sum_i h_i\, \bar{X}_i^{\mathrm{fin}}(t)$ est le coût de stockage dans les dépôts ;
- $g_p = p\sum_i B_i\,(t)$ est le coût de pénurie, c'est-à-dire des occasions de vaccination manquées ;
- $g_w = w\sum_i W_i\,(t)$ est le coût des pertes ;
- $g_t = \sum_i \left(K_i\mathbf{1}_{\{Q_i(t)>0\}} + c_i Q_i(t)\right)$ est le coût de transport, composé d'un coût fixe par expédition, croissant avec l'éloignement, et d'un coût variable.

L'objectif consiste à minimiser le coût total actualisé espéré sur l'ensemble Π des politiques admissibles :

$$\min_{\pi\in\Pi} J^\pi(s_0) = \mathbb{E}_{s_0}^\pi\left[\sum_{t=0}^{T} \beta^t\, g(S_t, U_t)\right] \quad (18)$$

sous les contraintes suivantes, pour tous i, a, ℓ et t :

$$\begin{cases} \text{dynamique (6)-(10)}, \\ 0 \le \bar{X}_i(t) \le C_i, \\ X_i^a(t) \ge 0,\ Y_i^{a,\ell}(t) \ge 0, \\ W_i^{\exp}(t) = R_i^{\tau-1}(t), \\ U_i(t) \ge 0,\ U(t) \in \mathcal{U}(S_t), \\ Q_i(t) \text{ donné par (14)} \end{cases} \quad (19)$$

Ces contraintes traduisent respectivement:

- la dynamique et la conservation des stocks ;
- la limitation des capacités ;
- la non-négativité ;
- la péremption ;
- l'admissibilité des décisions ;
- le rationnement amont.

Le facteur d'actualisation $\beta \in (0,1)$ pondère les coûts futurs par rapport aux coûts immédiats : un coût supporté dans t semaines est valorisé à β^t fois sa valeur actuelle. Il garantit la convergence du coût total lorsque l'horizon tend vers l'infini. Nous retenons $\beta = 0{,}999$ par semaine, soit environ 5 % par an. Le Tableau 3 récapitule les paramètres de coût et de simulation.

Tableau 3 *:* Hypothèses de modélisation, de coût et de simulation

Paramètre	Valeur de base	Justification	Valeurs testées (sensibilité)
Durée de vie résiduelle τ	24 semaines	Durée de vie résiduelle effective à la réception au central (vaccin RR : 30 mois à la fabrication [7])	12 ; 52
Saisonnalité α, φ	0,15 ; semaine 10	Pic de saison sèche (1er trimestre)	–
Régime épidémique p_{01}, p_{10}, ρ	0,01 ; 1/8 ; 0,60	Une flambée tous les 2 ans en moyenne, durée 8 sem., +60 % de demande	$p_{01} = 0{,}03$, $\rho = 1$
Dispersion r_i	40 / 25 / 15	Volatilité croissante avec l'enclavement	10 / 6 / 4
Délais : k_L, borne	8 ; $\lceil\mathbb{E}[L_i]\rceil + 3$	Plages min-max historiques	$\mathbb{E}[L_i] \times 0{,}75$; $\times$ 1,5

Paramètre	Valeur de base	Justification	Valeurs testées (sensibilité)
Délai international L_0	6 + NB(3 ; 4), ≤ 20 sem.	Approvisionnement international	–
Incidents de froid θ_i, κ	0,002 + 0,002 $\mathbb{E}[L_i]/7$; 0,30	Pannes d'énergie, ruptures de la chaîne du froid	× 5
Capacité centrale C_0	250 000 doses	≈ 18 semaines de demande nationale	–
Coût de stockage h_i (prov. / central)	0,005 / 0,003 u.m./dose/sem.	1 u.m. = valeur d'une dose	–
Coût de pénurie p	10 u.m./dose	Coût social d'une occasion manquée	2 ; 5 ; 20 ; 50
Coût de perte w	1 u.m./dose	Valeur de la dose	–
Coût fixe de transport K_i	50 + 50 $\mathbb{E}[L_i]$ u.m.	Croissant avec l'éloignement	–
Coût variable c_i	0,02 $\mathbb{E}[L_i]$ u.m./dose	Croissant avec l'éloignement	–
Coût de commande centrale K_0	500 u.m.	Commande internationale	–
Actualisation β	0,999 / semaine	≈ 5 % par an	–
Horizon, mise en régime, réplications	312 + 52 sem. ; R = 300	2020-2025	R = 100

3.11 Optimisation dynamique : formulation markovienne

Le problème (18)-(19) est un processus de décision markovien (MDP) $(\mathcal{S}, \mathcal{U}, P, g, \beta)$, où $P(s' \mid s, u)$ est la probabilité de transition induite par (2)-(14). Pour l'horizon infini, la fonction valeur optimale V^* vérifie l'équation de Bellman

$$V^*(s) = \min_{u \in \mathcal{U}(s)} \{ \; g(s,u) + \beta \times \sum_{s' \in \mathcal{S}} P(s' \mid s, u)\, V^*(s') \} \tag{20}$$

Toute politique qui atteint le minimum dans (20) est optimale [41, 42]. Elle arbitre simultanément entre ruptures, coûts, pertes et effets des délais.

3.12 Propriétés théoriques du modèle

Les doses étant discrètes, les stocks sont bornés par les capacités, les délais sont bornés (H4), et M_i et ϕ prennent un nombre fini de valeurs. L'espace d'états $\mathcal{S}$ et les ensembles $\mathcal{U}(s)$ sont donc **finis**, et les coûts sont bornés (H9) par une constante $\bar{g}$.

Proposition 1 (Existence, unicité et invariance du processus). Pour tout état initial $s_0 \in \mathcal{S}$ et toute politique admissible π, il existe une unique loi de probabilité sur les trajectoires $(S_t, U_t)_{t \geq 0}$ telle que $S_0 = s_0$, $U_t = \pi_t(S_0, \dots, S_t) \in \mathcal{U}(S_t)$ et $S_{t+1} = F(S_t, U_t, \xi_t)$, où $\xi_t = \left(D(t), L(t), M(t+1), \xi^{\mathrm{cf}}(t)\right)$ regroupe les aléas de la période. De plus, $0 \leq \bar{X}_i(t) \leq C_i$ et $\Omega_i(t) = 0$ pour tous i et t.

Preuve. La fonction F définie par (6)-(14) est mesurable et à valeurs dans $\mathcal{S}$. Les aléas ξ_t sont, conditionnellement à S_t, indépendants du passé (les régimes évoluent selon la chaîne (2) incluse dans l'état ; les demandes, délais et incidents sont tirés indépendamment). Le théorème d'Ionescu-Tulcea [43] assure alors l'existence et l'unicité de la loi du processus, construite récursivement à partir de s_0, de π et des noyaux de transition. Pour l'invariance, on raisonne par récurrence. Si $\mathrm{IP}_i(t) + U_i(t) \leq C_i$, ce que garantit (13), le stock physique à toute date ultérieure, qui est au plus égal à la position de stock diminuée de la consommation, reste inférieur ou égal à C_i ; donc $\Omega_i \equiv 0$. La positivité découle de (6), puisque $V_i^a \leq X_i^a$, et de (14), puisque Q_i ne dépasse pas le stock amont disponible. ▫

Théorème 2 (Propriété de Markov homogène). Sous toute politique markovienne stationnaire $u = f(s)$, le processus $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ défini par (12) est une chaîne de Markov homogène sur $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(S_{t+1} = s' \mid S_0, \dots, S_t) \\ &= \mathbb{P}(S_{t+1} = s' \mid S_t) \\ &= P\big(s' \mid S_t, f(S_t)\big) \end{aligned} \tag{21}$$

Preuve. L'état contient :

- les stocks par âge, qui déterminent la consommation (6) et la péremption (8) ;
- le transit par âge et par délai résiduel, qui détermine exactement les arrivées futures (9) ;
- les régimes M_i, qui déterminent la loi de la demande (3)-(4) ;
- la phase ϕ, qui rend la composante saisonnière fonction de l'état et non du temps calendaire.

Ainsi $S_{t+1} = F(S_t, f(S_t), \xi_t)$, où la loi de ξ_t ne dépend que de S_t. Il en résulte (21), avec un noyau indépendant de t. Sans la phase ϕ, la chaîne serait markovienne mais non homogène, ce qui corrige l'énoncé de la version initiale. ▫

Théorème 3 (Existence d'une politique optimale). Sous H1-H10 :

(i) pour l'horizon fini T, il existe une politique markovienne déterministe optimale pour (18), obtenue par induction arrière ;
(ii) pour l'horizon infini, il existe une politique stationnaire déterministe π^* telle que $V^{\pi^*} = V^*$, solution unique de (20) ;
(iii) enfin, $|J_T^*(s) - V^*(s)| \leq \beta^{T+1} \bar{g}/(1-\beta)$.

Preuve. (i) et (ii) découlent des théorèmes 4.4.2 et 6.2.10 de Puterman [41] pour un MDP à espaces d'états et d'actions

finis, à coûts bornés et avec $0 < \beta < 1$. Pour (iii), on écrit $V^* - J_T^*$ comme l'espérance de la queue $\sum_{t>T} \beta^t\, g$, bornée par $\sum_{t>T} \beta^t\, \bar{g} = \beta^{T+1}\bar{g}/(1-\beta)$. Le même argument vaut pour toute politique, et donc pour les politiques optimales.

Théorème 4 (Convergence de l'itération sur les valeurs). Soit l'opérateur de Bellman

$$(\mathcal{T}V)(s) = \min_{u \in \mathcal{U}(s)} \{\; g(s,u) + \beta \times \sum_{s'} P\,(s' \mid s,u) V(s')\} \tag{22}$$

Pour toutes fonctions bornées V, W, on a $\| \mathcal{T}V - \mathcal{T}W \|_\infty \leq \beta \| V - W \|_\infty$. Par conséquent, la suite $V_{n+1} = \mathcal{T}V_n$ converge vers l'unique point fixe V^*, avec $\| V_n - V^* \|_\infty \leq \beta^n \| V_0 - V^* \|_\infty$. Si de plus $\| V_{n+1} - V_n \|_\infty < \varepsilon(1-\beta)/(2\beta)$, la politique gloutonne associée à V_{n+1} est ε-optimale.

Preuve. Pour tout s et tout u, on a $|\beta \sum_{s'} P\,(s' \mid s,u)(V - W)(s')| \leq \beta \| V - W \|_\infty$. Comme $|\min_u a_u - \min_u b_u| \leq \max_u |a_u - b_u|$, l'opérateur $\mathcal{T}$ est une contraction de rapport β dans l'espace de Banach des fonctions bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Le théorème du point fixe de Banach donne l'existence et l'unicité de V^* ainsi que la vitesse géométrique. Le critère d'arrêt est le théorème 6.3.1 de Puterman [41]. ▫

Proposition 5 (Ergodicité et estimation des performances). Supposons qu'une politique stationnaire f induise une chaîne *unichaîne*, c'est-à-dire possédant une seule classe récurrente. Alors il existe une unique loi stationnaire ν_f sur $\mathcal{S}$, et pour toute fonction h (taux de service, pertes, coût), presque sûrement et quel que soit l'état initial,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} h\,(S_t) = \sum_s \nu_f\,(s)\, h(s) \tag{23}$$

Preuve. Une chaîne de Markov homogène sur un espace fini possède au moins une classe récurrente, et toute classe récurrente d'une chaîne finie est récurrente positive. Sous l'hypothèse unichaîne, la loi stationnaire est unique et le théorème ergodique des chaînes de Markov s'applique [44, 45, 46]. ▫

Remarque. La Proposition 5 remplace le « théorème de stabilité » de la version initiale. Dans un système à capacités finies et à ventes perdues, l'espace d'états est borné, si bien que la stabilité au sens de Foster-Lyapunov est automatique et ne requiert pas la condition $\mathbb{E}[D_i] < \mathbb{E}[R_i]$, qui était d'ailleurs incompatible avec la conservation des flux en régime stationnaire. La question pertinente n'est pas la stabilité mais le *niveau* des indicateurs stationnaires (23), que nous estimons par simulation. L'hypothèse unichaîne est vérifiée empiriquement : les moyennes temporelles ne dépendent pas de l'état initial, et leurs intervalles de confiance se resserrent en $1/\sqrt{R}$ (section 5.5).

Proposition 6 (Condition de non-péremption). On considère un site i à demande constante λ_i, sans incident de chaîne du froid, géré en FEFO, dont tous les lots arrivent avec le même âge $\bar{a}_i$. Si le stock physique juste après chaque arrivée n'excède jamais $\lambda_i(\tau - \bar{a}_i)$, aucune dose ne se périme au site i. En particulier, sous la règle (15) avec un délai constant, la condition suffisante est

$$S_i \leq \lambda_i\,(\tau - \bar{a}_i) \tag{24}$$

Preuve. En FEFO, les lots ayant le même âge à l'arrivée sont consommés dans l'ordre d'arrivée. Une dose arrivant en t_0 ne peut être précédée que par des doses déjà présentes en t_0. Elle est donc consommée au plus tard après $\bar{X}_i(t_0^+)/\lambda_i$ semaines, où $\bar{X}_i(t_0^+)$ est le stock juste après l'arrivée. Son âge à la consommation est au plus $\bar{a}_i + \bar{X}_i(t_0^+)/\lambda_i \leq \tau$ par hypothèse. Sous (15), la position de stock ne dépasse jamais S_i et le stock physique est au plus égal à la position de stock ; d'où (24). ▫

Corollaire 7 (Faisabilité conjointe service-péremption). Notons d_0 le temps moyen de séjour des doses au dépôt central, de sorte que $\bar{a}_i \approx d_0 + \mathbb{E}[L_i]$. Éviter les ruptures systématiques exige $s_i \geq \lambda_i(\mathbb{E}[L_i] + 1)$. Avec $s_i < S_i$ et (24), absence de rupture systématique et absence de péremption ne sont compatibles que si

$$2\,\mathbb{E}[L_i] + 1 + d_0 < \tau \tag{25}$$

Le Corollaire 7 fournit un seuil de délai au-delà duquel une province ne peut pas être servie sans pertes, quelle que soit la politique, à moins de réduire d_0 (temps de séjour au central) ou l'âge à l'arrivée. C'est précisément l'objet de l'allocation différenciée par âge et du pilotage par échelon.

3.13 Méthode de résolution

L'équation (20) ne peut pas être résolue exactement à l'échelle nationale. Pour la seule province de Tshuapa ($C_i = 2\,700$, $\tau = 24$), le nombre de vecteurs d'âge admissibles est $\binom{C_i+\tau}{\tau} \approx 10^{58,6}$. Nous adoptons donc une démarche en deux temps.

Optimisation par simulation dans la classe (15)-(16). Pour chaque couple (z, q) de la grille, le réseau complet est simulé (80 réplications, graine fixe, nombres aléatoires communs), puis on retient pour chaque province le couple qui minimise son coût moyen. Cette décomposition est inspirée de Clark et Scarf [23]. Les politiques retenues sont ensuite évaluées sur 300 réplications indépendantes, avec des graines distinctes de celles de l'optimisation, afin d'éviter le biais d'optimisme.

Résolution exacte sur une instance réduite. L'équation de Bellman est résolue par itération sur les valeurs pour un site isolé (unité : lot ; $\tau = 3$; $C = 12$ lots ; délai d'une semaine ; demande binomiale négative de moyenne 3 lots et de taille 5 ; $h = 0{,}02$, $p = 10$, $w = 1$, $K = 2$, $\beta = 0{,}95$; 455 états). Cette instance mesure l'écart d'optimalité des règles (s,S) et illustre le Théorème 4.

4. Plan d'expérience numérique et démarche de validation

4.1 Indicateurs de performance

Pour chaque province et à l'échelle nationale, on calcule :

- le **taux de service** $\mathrm{TS} = 1 - \sum_t B_i\,(t) / \sum_t D_i\,(t)$, qui est la part de la demande servie ;
- la **fréquence de rupture**, qui est la proportion de semaines où $B_i(t) > 0$;
- le **taux de pertes** (11) ;
- le stock moyen ;
- le nombre d'expéditions par an ;

- le coût moyen par semaine.

Les intervalles de confiance à 95 % sont calculés sur les réplications indépendantes. Les politiques sont comparées par différences appariées (nombres aléatoires communs) et par le test des rangs signés de Wilcoxon.

4.2 Vérification et validation

Le modèle a été vérifié et validé selon les recommandations de Sargent [47] et de Law [48], en quatre volets.

1. **Vérification.** La conservation des doses (10) est contrôlée à chaque période, à la précision machine près.
2. **Validation interne de la procédure d'estimation.** Pour 200 réplications et chaque province, 312 semaines de demande sont simulées avec le modèle complet, puis λ_i est ré-estimé. Nous examinons :
   - le biais et l'erreur quadratique ;
   - la couverture des intervalles de confiance, naïfs et de Newey-West [49] ;
   - le test de surdispersion ;
   - la sélection de la loi de demande par AIC entre Poisson, binomiale négative et binomiale négative saisonnière [50].
3. **Validation prédictive hors échantillon.** Le modèle binomial négatif saisonnier est ajusté sur 2020-2023, puis l'on mesure, sur 2024-2025, la couverture des intervalles de prédiction à 90 %, la RMSE, la MAE et la MAPE.
4. **Convergence Monte Carlo et analyse de sensibilité** : la sensibilité est étudiée sur dix scénarios et sur le coût de pénurie.

La version initiale comparait des « demandes observées reconstruites », générées comme $\lambda_i + \varepsilon_i$, aux valeurs λ_i elles-mêmes. Cette comparaison est circulaire : un R^2 élevé y est garanti par construction et ne valide pas le modèle. Elle a donc été supprimée. Les séries hebdomadaires réelles de doses administrées par province n'étant pas disponibles pour cette étude, les volets 2 et 3 constituent une **vérification de cohérence interne**, et non une validation externe. La validation externe sur séries réelles (DHIS2/SNIS) est une priorité ; la fonction correspondante est fournie avec le code.

5. Résultats

5.1 Estimation des paramètres et hétérogénéité provinciale

Le modèle dont les paramètres sont estimés est le modèle stochastique de contrôle optimal de stocks périssables multi-sites et multi-échelons de la section 3. Plus précisément, l'estimation porte sur trois sous-modèles :

- le modèle de demande (3)-(4), pour λ_i ;
- le modèle de délai (5), pour $\mathbb{E}[L_i]$;
- les contraintes de capacité, pour C_i.

L'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne de la demande est la moyenne empirique

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} D_i(t) \qquad (26)$$

qui reste l'estimateur du maximum de vraisemblance de la moyenne sous la loi binomiale négative.

Le Tableau 2 révèle une forte hétérogénéité spatiale. La demande hebdomadaire varie de 300 doses (Tshuapa) à 1 100 doses (Kinshasa), et le délai moyen de 1,8 semaine (Kinshasa) à 7,1 semaines (Tanganyika). Le rapport C_i/λ_i, c'est-à-dire la couverture maximale exprimée en semaines de demande, est compris entre 7,3 semaines (Kinshasa) et 9,2 semaines (Kasaï Oriental). Par ailleurs, $52\lambda_i$ représente 1,06 à 1,17 fois la population cible annuelle, ce qui est cohérent avec l'inclusion, dans λ_i, d'un facteur de perte en flacons ouverts. Les provinces enclavées n'ont donc pas de capacité relative plus élevée pour compenser leurs délais plus longs. Cette dissymétrie annonce les goulots d'étranglement mis en évidence plus loin.

5.2 Vérification de la procédure d'estimation et validation prédictive

Le Tableau 4 et la Fig. 2 résument l'étude de recouvrement. L'estimateur (26) est pratiquement sans biais : le biais moyen est de 0,14 % et n'excède pas 0,67 % en valeur absolue. Son erreur quadratique relative est de 3,5 % (de 3,0 % à 3,9 % selon la province).

Les intervalles de confiance naïfs, qui supposent l'indépendance temporelle, ne couvrent la vraie valeur que dans 64,7 % des cas. La correction de Newey-West porte la couverture à 89,3 %. La persistance des flambées (8 semaines en moyenne) induit donc une autocorrélation qu'il est indispensable de prendre en compte pour quantifier l'incertitude sur λ_i.

Le test de dispersion rejette la loi de Poisson dans 100 % des réplications, et l'AIC sélectionne la binomiale négative saisonnière dans 99,9 % des cas. Ces résultats justifient empiriquement H3 et répondent à la question de la nature aléatoire de la demande : celle-ci est non seulement aléatoire, mais surdispersée et saisonnière.

En validation prédictive, les intervalles à 90 % couvrent 88,7 % des observations de 2024-2025, ce qui est proche du nominal. La légère sous-couverture provient des flambées, non anticipables par un modèle saisonnier. La MAPE hebdomadaire est de 21,9 % : elle varie de 17 % à Kinshasa à 26 % dans les provinces les plus volatiles. La demande hebdomadaire est donc intrinsèquement peu prévisible, ce qui justifie une gestion des stocks fondée sur des distributions plutôt que sur des prévisions ponctuelles.

Tableau 4 : Vérification de la procédure d'estimation et validation prédictive (26 provinces ; 200 réplications pour l'estimation de $\boldsymbol{\lambda_i}$, 40 pour l'AIC et la prédiction)

Indicateur	Moyenne	Minimum	Maximum
Biais relatif de $\hat{\lambda}_i$ (%)	0,14	-0,18	0,67
Erreur quadratique moyenne relative (%)	3,48	3,03	3,87
Couverture IC 95 % naïf (%)	64,7	50,0	74,5

Indicateur	Moyenne	Minimum	Maximum
Couverture IC 95 % Newey-West (%)	89,2	84,0	94,5
Rejet de la loi de Poisson (test de dispersion, %)	100,0	100,0	100,0
Sélection NB saisonnière par AIC (%)	99,9	97,5	100,0
Couverture IP 90 % hors échantillon (%)	88,7	87,3	89,9
RMSE hors échantillon (doses/sem.)	143,8	96,3	255,3
MAE hors échantillon (doses/sem.)	109,6	74,4	191,2
MAPE hors échantillon (%)	21,9	17,1	26,4

Note : ces indicateurs portent sur des séries simulées par le modèle complet ; ils vérifient la cohérence interne de la chaîne estimation-simulation et ne constituent pas une validation externe.

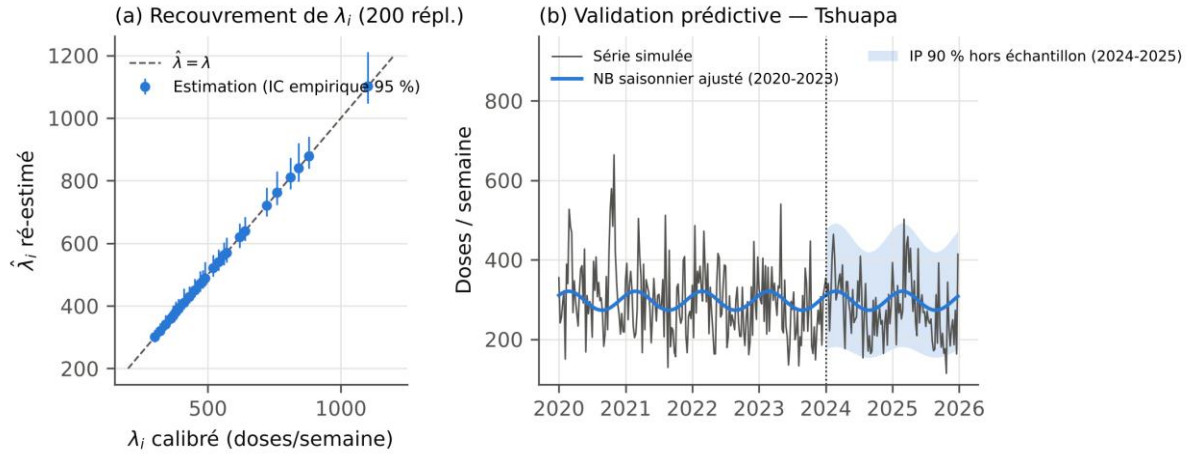


***Figure 2** : (a) Valeurs ré-estimées de λ_i en fonction des valeurs calibrées (moyenne et intervalle empirique à 95 % sur 200 réplications) ; (b) ajustement du modèle binomial négatif saisonnier sur 2020-2023 et intervalle de prédiction à 90 % hors échantillon (2024-2025), Tshuapa. Source : simulations des auteurs.*

5.3 Dynamique simulée de la demande vaccinale

La Fig. 3 présente une réalisation de la demande hebdomadaire. Elle remplace la figure à 26 courbes superposées de la version initiale, peu lisible. Le panneau (a) compare trois provinces contrastées ; le panneau (b) représente la demande relative $D_i(t)/\lambda_i$ des 26 provinces sous forme de carte de chaleur, les provinces étant triées par délai moyen.

Trois composantes apparaissent. La saisonnalité produit un pic au premier trimestre. Les flambées se traduisent par des bandes sombres persistantes de quelques semaines, asynchrones entre provinces. Enfin, le bruit binomial négatif est visiblement plus marqué dans les provinces enclavées du bas du panneau. Ces observations confirment qu'une gestion uniforme est inadaptée : les pics locaux ne sont pas synchronisés et ne peuvent pas être absorbés par un stock national seul.

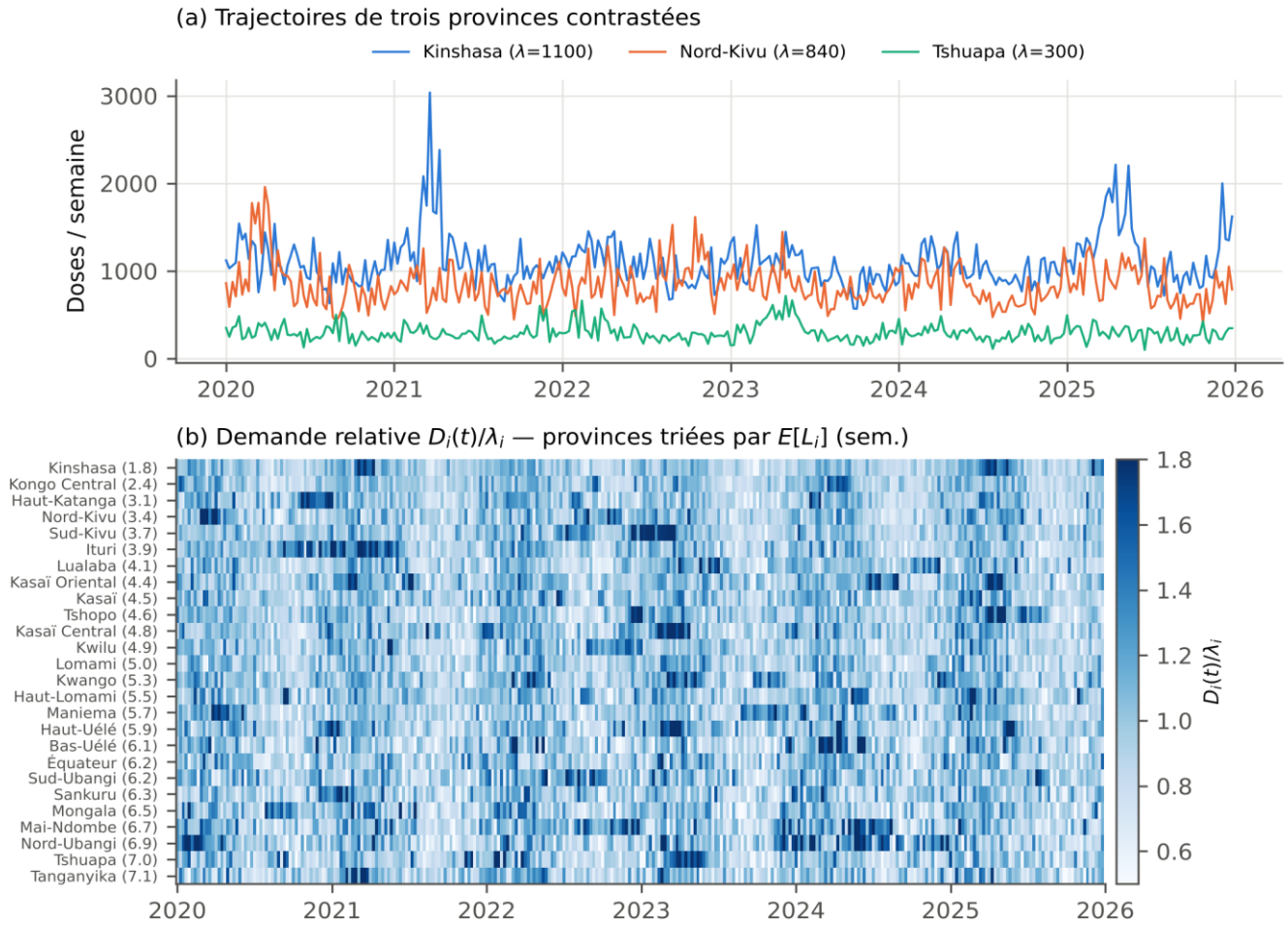


Figure 3. *: Demande vaccinale hebdomadaire simulée (2020-2025) : (a) trajectoires de Kinshasa, du Nord-Kivu et de la Tshuapa ; (b) demande relative $D_i(t)/\lambda_i$ des 26 provinces, triées par délai moyen (entre parenthèses, en semaines). Source : simulations des auteurs.*

5.4 Analyse des délais logistiques simulés

Le Tableau 5 et la Fig. 4 décrivent les délais simulés selon (5), **exprimés en semaines** et cohérents avec le Tableau 2. Un gradient centre-périphérie net apparaît. Kinshasa, le Kongo Central et le Haut-Katanga ont des délais moyens inférieurs à 3,1 semaines. Les provinces du nord et du nord-ouest (Nord-Ubangi, Tshuapa, Mongala, Mai-Ndombe) ainsi que le Tanganyika dépassent 6,2 semaines, avec un 95e centile de 10 à 11 semaines. Les distributions sont asymétriques à droite : la moyenne dépasse la médiane dans les provinces enclavées, de sorte que des retards extrêmes, rares mais critiques, pèsent de manière disproportionnée sur le risque de rupture.

Tableau 5 : Délais d'acheminement simulés (semaines), 20 000 tirages par province, triés par délai moyen

Province	$\mathbb{E}[L_i]$ calibré	Moyenne simulée	Médiane	P5	P95	Max.	CV
Kinshasa	1,8	1,80	2	1	4	5	0,51
Kongo Central	2,4	2,38	2	1	5	6	0,53
Haut-Katanga	3,1	3,08	3	1	6	7	0,50
Nord-Kivu	3,4	3,36	3	1	7	7	0,49
Sud-Kivu	3,7	3,64	3	1	7	7	0,47
Ituri	3,9	3,79	4	1	7	7	0,46
Lualaba	4,1	4,06	4	1	8	8	0,47
Kasaï Oriental	4,4	4,31	4	1	8	8	0,46
Kasaï	4,5	4,39	4	1	8	8	0,45
Tshopo	4,6	4,48	4	1	8	8	0,44
Kasaï Central	4,8	4,64	4	2	8	8	0,44

Province	$\mathbb{E}[L_i]$ calibré	Moyenne simulée	Médiane	P5	P95	Max.	CV
Kwilu	4,9	4,71	5	2	8	8	0,43
Lomami	5,0	4,83	5	2	8	8	0,42
Kwango	5,3	5,17	5	2	9	9	0,43
Haut-Lomami	5,5	5,29	5	2	9	9	0,43
Maniema	5,7	5,45	5	2	9	9	0,42
Haut-Uélé	5,9	5,62	5	2	9	9	0,40
Bas-Uélé	6,1	5,91	6	2	10	10	0,42
Équateur	6,2	6,00	6	2	10	10	0,41
Sud-Ubangi	6,2	6,00	6	2	10	10	0,42
Sankuru	6,3	6,05	6	2	10	10	0,41
Mongala	6,5	6,23	6	2	10	10	0,40
Mai-Ndombe	6,7	6,40	6	2	10	10	0,39
Nord-Ubangi	6,9	6,52	6	2	10	10	0,38
Tshuapa	7,0	6,61	7	2	10	10	0,38
Tanganyika	7,1	6,81	7	3	11	11	0,40

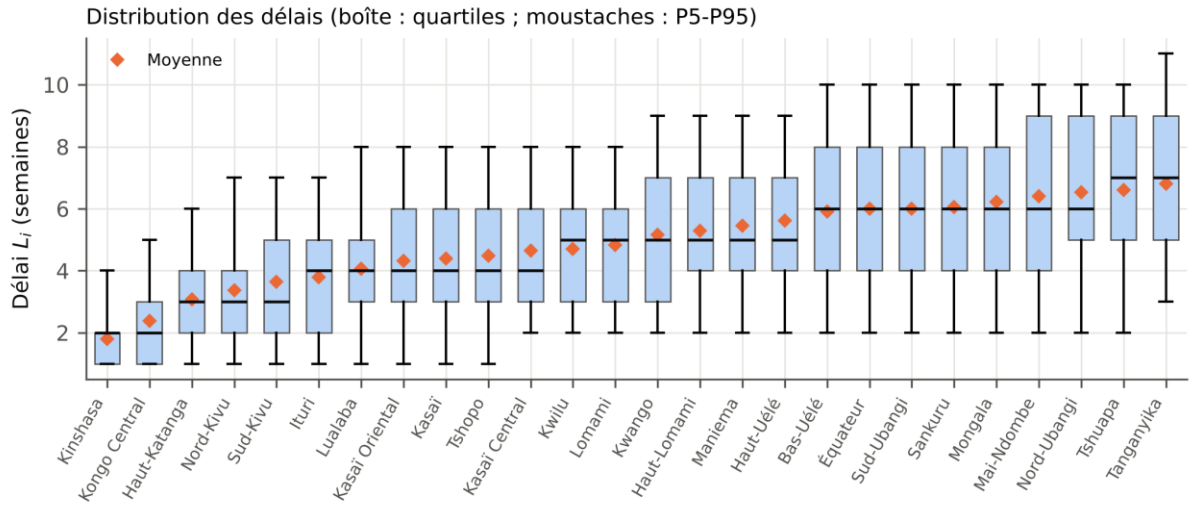


Figure 4. *: Distribution des délais d'acheminement simulés par province (boîte : quartiles ; moustaches : 5^{e}-95^{e} centiles ; losange : moyenne). Source : simulations des auteurs.*

5.5 Comparaison des politiques de réapprovisionnement

Le Tableau 6 présente les indicateurs nationaux sur 300 réplications. La politique de référence P0 sert 74,7 % de la demande, connaît une rupture dans 31,7 % des semaines-provinces et perd 9,5 % des doses. La règle (s,S) sur le stock physique (P1) n'améliore que modestement la situation. Les politiques fondées sur la position de stock (P2a et P2) portent le taux de service à 97,7 % et ramènent le taux de pertes sous 0,5 %.

Par rapport à P0, la politique P2 :

- augmente le taux de service de 23,0 points (IC 95 % : ± 0,07) ;
- réduit le taux de pertes de 9,1 points ;
- abaisse le coût logistique hebdomadaire de 30 582 u.m., soit −75,6 % (Wilcoxon apparié, $p < 10^{-50}$ pour les trois indicateurs).

En volumes, environ 169 500 occasions de vaccination manquées et 55 000 doses perdues sont évitées chaque année. La demi-largeur de l'intervalle de confiance du taux de service national passe de 0,27 point avec 10 réplications à 0,03 point avec 300, ce qui confirme la précision des estimations.

Tableau 6 *:* Performances nationales des politiques (moyenne ± demi-largeur de l'IC à 95 %, 300 réplications, 2020-2025)

Indicateur national	P0	P1	P2a	P2
Taux de service (%)	74,66 ± 0,07	80,83 ± 0,09	97,71 ± 0,03	97,71 ± 0,03
Semaines avec rupture (%)	31,7 ± 0,1	25,2 ± 0,1	4,2 ± 0,0	4,2 ± 0,0
Taux de pertes (%)	9,52 ± 0,10	3,45 ± 0,08	0,43 ± 0,01	0,39 ± 0,01
Occasions manquées (doses/an)	186 337	141 028	16 844	16 862
Doses perdues (doses/an)	57 814	21 214	3 090	2 805

Indicateur national	P0	P1	P2a	P2
Stock moyen au central (doses)	133 946	114 567	91 245	88 456
Coût moyen (u.m./semaine)	40 453 ± 117	30 598 ± 137	9 872 ± 45	9 871 ± 46
Coût actualisé 2020-2025 (10^6 u.m.)	10,88	8,23	2,65	2,65

Note : P0 = min-max mensuel sur stock physique ; P1 = (s,S) sur stock physique ; P2a = (s,S) optimisé sur position de stock ; P2 = P2a + pilotage par échelon et allocation par âge. u.m. : unité monétaire (valeur d'une dose).

Trois mécanismes expliquent ces écarts.

La prise en compte du transit. Sous P0, les réquisitions mensuelles ignorent les livraisons en cours. Lorsque le délai dépasse l'intervalle de revue, les livraisons se chevauchent : des surstocks apparaissent (1,3 % de la demande perdue par dépassement de capacité), suivis de ruptures. La décomposition des pertes sous P0 est la suivante : péremption en stock 4,0 %, péremption en transit 2,4 %, surstockage 1,3 % et chaîne du froid 0,2 % de la demande.

Le positionnement du stock. P2 détient davantage de stock au niveau provincial (47 800 doses contre 26 000 sous P0), mais beaucoup moins au dépôt central (88 500 contre 133 900). Le stock total du système baisse ainsi de 15 % tout en étant placé plus près de la demande. Par la loi de Little [51], le temps moyen de séjour au central passe de 9,5 à 6,3 semaines. L'âge des doses à leur arrivée en province diminue d'autant, ce qui relâche la contrainte (24).

La contrepartie : des expéditions plus fréquentes. P2 réalise environ 774 expéditions par an contre 307 sous P0, soit environ 30 par province et par an. Ce surcoût de transport est intégré dans la fonction de coût et reste largement compensé par la réduction des pénuries et des pertes. Il suppose toutefois une capacité de transport accrue vers les provinces enclavées.

L'apport propre de la coordination par échelon et de l'allocation par âge (P2 par rapport à P2a) est faible mais significatif sur les pertes : −9,2 % de doses perdues, soit 3 090 contre 2 805 par an ($p < 10^{-50}$). Il est nul sur le taux de service ($p = 0{,}74$). Dans le scénario de base, l'essentiel du gain provient donc de l'usage de la position de stock. Le rôle de l'allocation par âge croît lorsque les délais s'allongent (section 5.8).

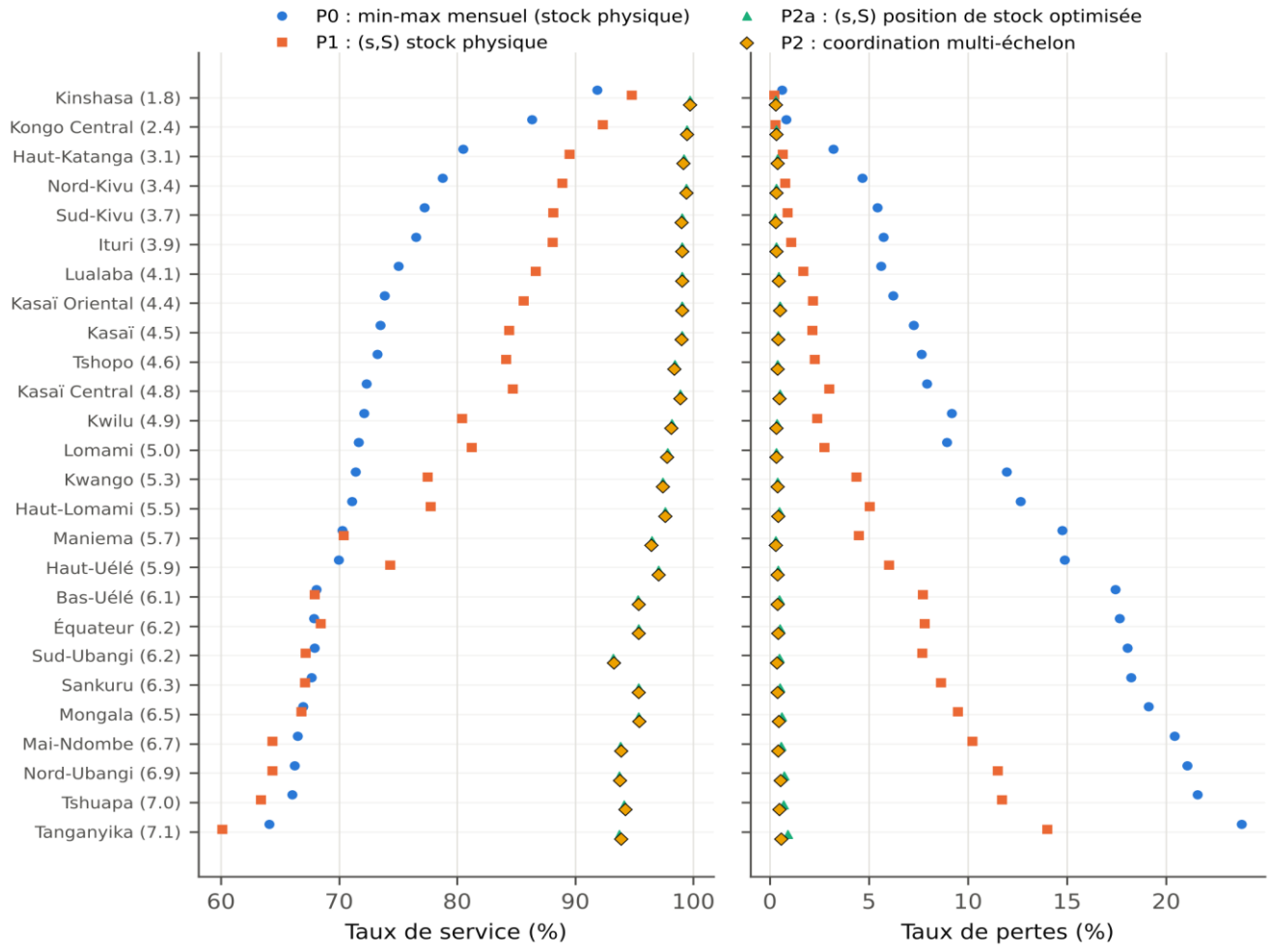


***Figure 5** : Taux de service et taux de pertes par province et par politique (moyennes sur 300 réplications ; provinces triées par délai moyen, en semaines). Source : simulations des auteurs.*

Au niveau provincial (Tableau 7, Fig. 5), les performances se dégradent de façon quasi monotone avec le délai moyen. Sous P0, la corrélation de rang entre $\mathbb{E}[L_i]$ et le taux de service vaut $-0{,}999$ ($p < 10^{-30}$), et celle avec le taux de pertes vaut 0,998. Le taux de service va de 91,9 % à Kinshasa à 64,1 % au Tanganyika, où 23,8 % des doses sont perdues.

Sous P2, le gradient persiste pour le service ($\rho = -0{,}96$) : de 99,7 % à Kinshasa à 93,3-94,2 % au Sud-Ubangi, au Nord-Ubangi, en Tshuapa et au Tanganyika. Il devient en revanche faible pour les pertes, qui restent inférieures ou égales à 0,6 % partout. L'optimisation conduit à $S_i = C_i$ dans 25 provinces sur 26 : **la capacité de stockage est la contrainte saturante**. Le service résiduel des provinces enclavées est limité par leur capacité, qui ne couvre que 8 à 9 semaines de demande pour des délais pouvant atteindre 11 semaines.

Notons enfin que P1 fait moins bien que P0 dans les provinces les plus éloignées (Tableau 7). Attendre la livraison en cours avant de recommander, avec un seuil fondé sur le stock physique, y provoque des ruptures prolongées. La règle (s,S) sur le stock physique de la version initiale est donc inadaptée aux délais longs.

Tableau *7 :* Résultats simulés par province (%, moyennes sur 300 réplications) : taux de service (TS), taux de pertes (TP) et proportion de semaines avec rupture (Rupt.)

Province	$\mathbb{E}[L_i]$	TS P0	TS P1	TS P2	TP P0	TP P1	TP P2	Rupt. P0	Rupt. P2
Kinshasa	1,8	91,9	94,8	99,7	0,6	0,2	0,3	11,4	0,5
Kongo Central	2,4	86,3	92,3	99,5	0,8	0,3	0,3	17,8	0,8
Haut-Katanga	3,1	80,5	89,5	99,2	3,2	0,6	0,4	24,0	1,2
Nord-Kivu	3,4	78,7	88,9	99,4	4,7	0,8	0,3	25,8	1,0
Sud-Kivu	3,7	77,2	88,1	99,0	5,4	0,9	0,3	27,4	1,6
Ituri	3,9	76,5	88,1	99,1	5,7	1,1	0,3	28,1	1,5
Lualaba	4,1	75,0	86,6	99,0	5,6	1,7	0,5	29,5	1,3
Kasaï Oriental	4,4	73,9	85,6	99,0	6,2	2,1	0,5	30,6	1,3
Kasaï	4,5	73,5	84,4	99,0	7,3	2,1	0,4	30,9	1,5
Tshopo	4,6	73,3	84,1	98,4	7,6	2,3	0,4	31,3	2,4
Kasaï Central	4,8	72,3	84,7	98,9	7,9	3,0	0,5	32,1	1,6
Kwilu	4,9	72,1	80,4	98,1	9,2	2,4	0,3	32,4	2,9
Lomami	5,0	71,6	81,2	97,8	8,9	2,7	0,3	32,8	3,3
Kwango	5,3	71,4	77,5	97,4	12,0	4,3	0,4	32,9	3,8
Haut-Lomami	5,5	71,1	77,7	97,6	12,7	5,0	0,4	33,1	3,6
Maniema	5,7	70,2	70,4	96,5	14,7	4,5	0,3	34,1	5,5
Haut-Uélé	5,9	69,9	74,3	97,1	14,9	6,0	0,4	34,4	4,3
Bas-Uélé	6,1	68,0	67,9	95,3	17,4	7,7	0,4	36,2	6,9
Équateur	6,2	67,8	68,4	95,4	17,7	7,8	0,4	36,4	6,8
Sud-Ubangi	6,2	67,9	67,1	93,3	18,0	7,7	0,4	36,2	9,3
Sankuru	6,3	67,6	67,1	95,4	18,2	8,6	0,4	36,6	6,7
Mongala	6,5	67,0	66,8	95,4	19,1	9,5	0,4	37,1	6,6
Mai-Ndombe	6,7	66,5	64,4	93,9	20,4	10,2	0,4	37,5	8,7
Nord-Ubangi	6,9	66,2	64,3	93,8	21,1	11,5	0,5	37,9	8,6
Tshuapa	7,0	66,0	63,4	94,2	21,6	11,7	0,5	38,1	8,2
Tanganyika	7,1	64,1	60,1	93,9	23,8	14,0	0,6	39,8	8,8

Note : les résultats de P2a diffèrent de ceux de P2 de moins de 0,2 point pour le taux de service ; ils figurent dans les fichiers supplémentaires (code et résultats). Les intervalles de confiance à 95 % ont une demi-largeur inférieure à 0,6 point.

5.6 Mécanisme de vieillissement : illustration de la structure par âge

La Fig. 6 montre l'évolution simulée du stock de la Tshuapa, décomposé par classes d'âge, sous P0 et sous P2. Elle illustre concrètement le processus markovien structuré par âge (équations (6)-(9)).

Sous P0, les doses arrivent déjà âgées : elles ont séjourné longtemps au dépôt central puis environ sept semaines en transit. Le stock est dominé par la classe 18-23 semaines, proche de la péremption. Les arrivées groupées alternent avec de longues ruptures (barres négatives).

Sous P2, les lots arrivent plus jeunes grâce à l'allocation différenciée par âge et au séjour plus court au central. Le stock est réparti dans les classes 6-17 semaines et les ruptures deviennent rares et brèves.

Ce mécanisme confirme la Proposition 6. Avec $d_0 \approx 9{,}5$ semaines sous P0, le Corollaire 7 donne un seuil $\mathbb{E}[L_i] < (\tau - 1 - d_0)/2 \approx 6{,}8$ semaines, que dépassent le Nord-Ubangi, la Tshuapa et le Tanganyika, précisément les trois provinces les plus touchées par les pertes sous P0. Avec $d_0 \approx 6{,}3$ semaines sous P2, le seuil passe à 8,4 semaines et toutes les provinces deviennent faisables.

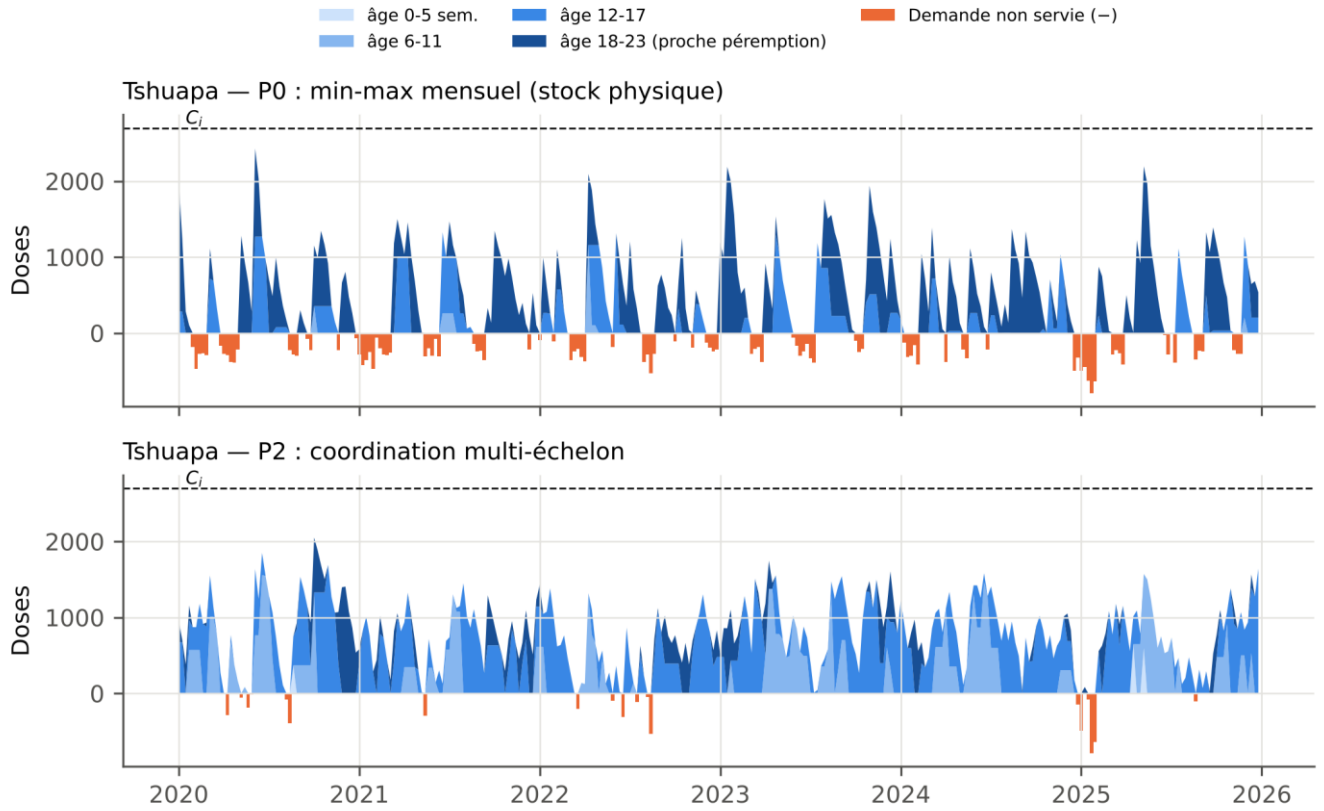


Figure. 6. *: Stock simulé de la Tshuapa par classes d'âge (aires empilées) et demande non servie (barres négatives) sous P0 (haut) et P2 (bas), 2020-2025 ; trait pointillé : capacité C_i. Source : simulations des auteurs.*

5.7 Optimalité : résolution exacte de l'équation de Bellman sur une instance réduite

Sur l'instance réduite (455 états), l'itération sur les valeurs converge en 453 itérations au seuil 10^{-8}. L'erreur $\| V_n - V^* \|_\infty$ décroît exactement au taux géométrique β^n prédit par le Théorème 4 (Fig. 7a).

La meilleure règle (s,S) fondée sur le stock total s'écarte de 12,2 % du coût optimal. La meilleure règle (s,S) fondée sur le stock non périmant à la période suivante s'en écarte de 3,9 % (Fig. 7b). La politique optimale dépend en effet de la composition par âge et pas seulement du total. Pour un même stock de 6 lots :

- l'optimum commande 6 lots si le stock est jeune, (6,0,0) ;
- il en commande 8 si le stock est réparti, (2,2,2) ;
- il en commande 12 si le stock est entièrement en fin de vie, (0,0,6).

Ce résultat justifie la représentation par âge. Il indique aussi une amélioration directe des règles opérationnelles : exclure de la position de stock les doses qui se périmeront avant la prochaine livraison.

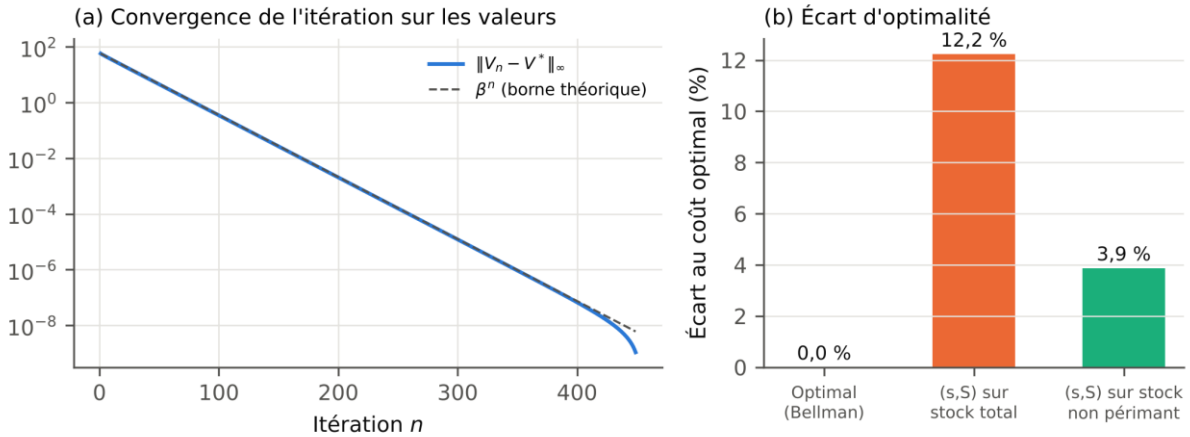


Figure 7. (a) : *Convergence de l'itération sur les valeurs (échelle logarithmique) comparée à la borne β^n ; (b) écart au coût optimal des meilleures règles (s,S) sur l'instance réduite. Source : calculs des auteurs.*

5.8 Analyse de sensibilité

La Fig. 8 et le Tableau 8 rapportent les indicateurs nationaux dans dix scénarios, les paramètres de P2 étant conservés.

La **durée de vie résiduelle** est le paramètre le plus influent. Avec $\tau = 12$ semaines, toutes les politiques s'effondrent (pertes de 36 % à 59 %). C'est la conséquence directe de la Proposition 6 : les niveaux S_i calibrés pour $\tau = 24$ violent alors la condition (24) dans toutes les provinces, y compris à Kinshasa, où $d_0 + \mathbb{E}[L_i] + S_i/\lambda_i \approx 3{,}9 + 1{,}8 + 7{,}3 = 13 > 12$. Même après ré-optimisation, le Corollaire 7 ($\mathbb{E}[L_i] < (12 - 1 - 3{,}9)/2 \approx 3{,}6$ semaines) ne serait satisfait que dans quatre provinces : Kinshasa, Kongo Central, Haut-Katanga et Nord-Kivu. Avec $\tau = 52$, les pertes deviennent marginales. Ce résultat souligne l'importance de recevoir des lots à durée de vie résiduelle longue et de réduire le séjour au dépôt central.

Un **allongement des délais** de 50 % fait chuter P1 sous P0 (52,1 % de taux de service) et réduit P2 à 91,7 %. C'est dans ce scénario que l'allocation par âge apporte le plus : 1,3 % de pertes sous P2 contre 2,3 % sous P2a.

Une **réduction de 25 % des capacités** abaisse le service de P2 à 94,0 %, alors qu'une augmentation de 25 % ne l'améliore pas. Les capacités sont déjà proches de la limite de péremption (24) : au-delà, un stock supplémentaire vieillit avant d'être consommé.

L'ordre des politiques est **robuste** dans tous les scénarios : P2 et P2a dominent toujours P0 et P1. Lorsque le coût de pénurie p varie de 2 à 50 (Tableau 8, dernière partie), avec ré-optimisation, le taux de service de P2 passe de 95,9 % à 98,4 % et la réduction de coût par rapport à P0 varie de 44 % à 89 %.

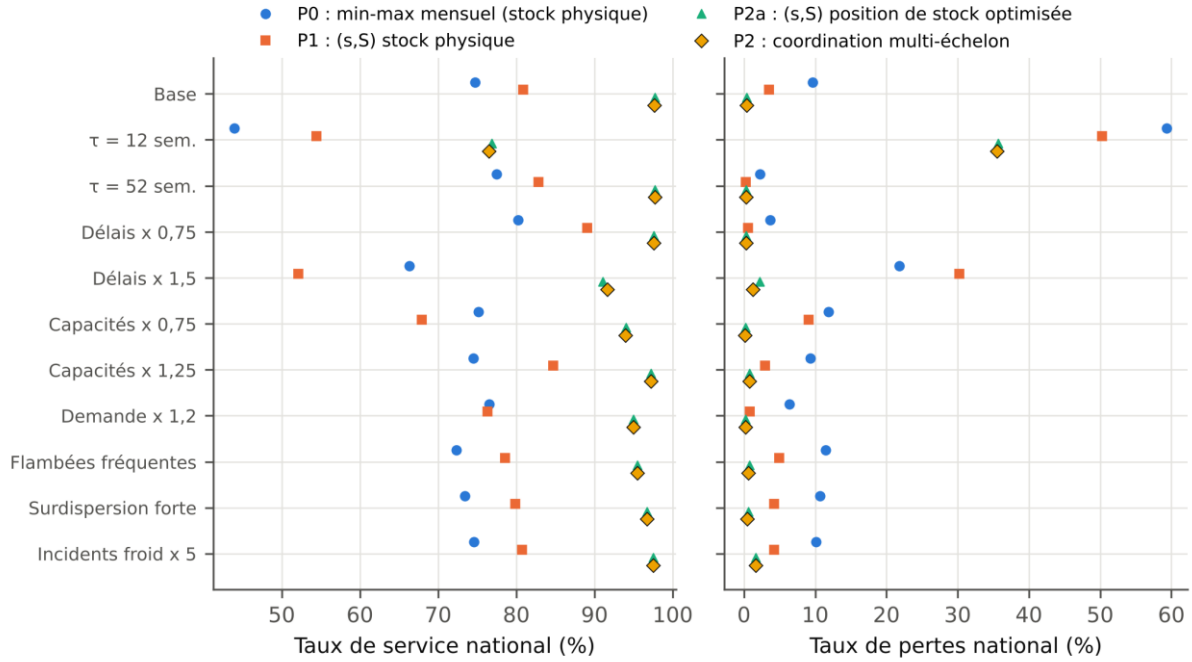


Figure 8. : *Analyse de sensibilité : taux de service et taux de pertes nationaux selon les scénarios et les politiques (100 réplications par scénario). Source : simulations des auteurs.*

Tableau *8 :* Analyse de sensibilité (indicateurs nationaux, 100 réplications par scénario)

Scénario	TS P0 (%)	TS P2 (%)	TP P0 (%)	TP P2 (%)	Coût P0 (u.m./sem.)	Coût P2 (u.m./sem.)
Base	74,7	97,7	9,6	0,4	40 357	9 852
τ = 12 sem.	43,9	76,5	59,3	35,6	91 960	45 201
τ = 52 sem.	77,5	97,7	2,2	0,3	35 452	9 811
Délais x 0,75	80,3	97,6	3,7	0,3	31 202	7 282
Délais x 1,5	66,3	91,7	21,8	1,3	55 158	24 605
Capacités x 0,75	75,1	94,0	11,8	0,2	40 165	17 747
Capacités x 1,25	74,5	97,2	9,3	0,8	40 532	8 652
Demande x 1,2	76,5	95,0	6,4	0,3	44 406	17 832
Flambées fréquentes	72,3	95,5	11,4	0,7	43 953	12 847
Surdispersion forte	73,4	96,7	10,7	0,5	42 282	11 030
Incidents froid x 5	74,6	97,6	10,1	1,7	40 574	10 275
Coût de pénurie p = 2 (ré-optimisé)	74,7	95,9	9,6	0,4	11 778	6 603

Scénario	TS P0 (%)	TS P2 (%)	TP P0 (%)	TP P2 (%)	Coût P0 (u.m./sem.)	Coût P2 (u.m./sem.)
Coût de pénurie p = 5 (ré-optimisé)	74,7	97,0	9,6	0,4	22 495	8 041
Coût de pénurie p = 10 (ré-optimisé)	74,7	97,8	9,6	0,4	40 357	9 850
Coût de pénurie p = 20 (ré-optimisé)	74,7	98,2	9,6	0,4	76 081	12 789
Coût de pénurie p = 50 (ré-optimisé)	74,7	98,4	9,6	0,4	183 253	19 896

6. Discussion

6.1 Synthèse et interprétation

Le système vaccinal congolais apparaît comme un système stochastique spatialement hétérogène dont la performance n'est pas limitée par la demande moyenne nationale, mais par trois interactions locales : délai, durée de vie résiduelle et capacité. La Proposition 6 et le Corollaire 7 les quantifient sous une forme exploitable par les gestionnaires. Le seuil $2\mathbb{E}[L_i] + 1 + d_0 < \tau$ identifie *ex ante* les provinces dans lesquelles toute politique engendrera des pertes, et il indique les leviers disponibles : réduire d_0, réduire $\mathbb{E}[L_i]$, ou recevoir des lots à durée de vie plus longue.

6.2 Comparaison avec la littérature

L'effet délétère des décisions fondées sur une information locale, ici le stock physique, est cohérent avec l'amplification de la variabilité décrite par Lee et al. [26] et avec l'avantage du pilotage par échelon établi par Clark et Scarf [23]. L'écart d'optimalité des règles (s,S) sur le stock total, en présence de péremption, est conforme aux résultats de Nahmias [8] et de Haijema et al. [22] : la politique optimale d'un produit périssable dépend de l'âge.

Les gains obtenus par une meilleure organisation du réseau rejoignent les conclusions des études HERMES au Niger et au Bénin [29, 30]. Ces études montrent que la reconfiguration des flux, plus que l'ajout de capacité isolé, améliore la disponibilité, ce que Haidari et al. [31] observent également en comparant transport et stockage. Notre analyse de sensibilité aboutit à la même conclusion : augmenter les capacités sans réduire l'âge à l'arrivée n'améliore pas le service.

6.3 Implications pour le PEV-RDC

Six recommandations découlent de l'étude.

1. **Fonder les réquisitions sur la position de stock**, c'est-à-dire le stock disponible augmenté des livraisons attendues, et non sur le stock physique seul. C'est le levier principal.
2. **Différencier les paramètres par province** selon (15)-(16), au lieu d'une règle uniforme.
3. **Réduire le temps de séjour au dépôt central** et affecter les lots les plus récents aux provinces enclavées.
4. **Prioriser les investissements de capacité** là où la contrainte (24) n'est pas saturée, et coupler toute extension de capacité à une réduction de l'âge à l'arrivée.
5. **Planifier une capacité de transport** compatible avec des livraisons plus fréquentes vers les provinces enclavées.
6. **Suivre l'âge des lots** (traçabilité par date de péremption) dans le système d'information logistique.

6.4 Limites

Cette étude présente plusieurs limites.

- Les séries hebdomadaires réelles de consommation n'étant pas disponibles, la validation est interne (sections 4.2 et 5.2) et non externe.
- Certains paramètres sont des hypothèses documentées (Tableau 3) : les paramètres du régime épidémique, la dispersion, les coûts et τ. La robustesse des conclusions à ces hypothèses a été vérifiée (section 5.8), mais les valeurs absolues des gains doivent être interprétées comme des ordres de grandeur.
- La règle P0 est une représentation stylisée des pratiques de réquisition ; les gains par rapport aux pratiques effectives peuvent différer.
- Les niveaux zones de santé et centres de vaccination sont agrégés au niveau provincial.
- Les pertes en flacons ouverts ne sont pas modélisées explicitement.
- Les chocs exogènes majeurs (conflits, catastrophes) ne sont représentés qu'à travers les incidents et la queue de distribution des délais.
- Les politiques optimisées appartiennent à la classe (s,S) : l'optimum global n'est connu que sur l'instance réduite.

6.5 Perspectives

Plusieurs extensions sont envisagées :

- la validation externe sur les séries DHIS2/SNIS ;
- la représentation explicite des quatre niveaux pour une ou deux provinces pilotes ;
- l'intégration des pertes en flacons ouverts [36] ;
- des règles fondées sur le stock non périmant ;
- l'approximation de la fonction valeur ou l'apprentissage par renforcement pour approcher l'optimum à grande échelle ;
- l'optimisation robuste face aux chocs de délais ;
- le couplage avec un modèle de transmission afin de traduire les occasions manquées en cas évités.

7. Conclusion

Cette étude a développé un modèle stochastique multi-échelon structuré par âge de la chaîne d'approvisionnement des vaccins contre la rougeole en RDC. Le modèle intègre une demande surdispersée modulée par la saison et par un régime épidémique, des délais aléatoires bornés, des capacités finies et la péremption, tant en stock qu'en transit. Six propriétés théoriques ont été établies : existence et invariance du processus, propriété de Markov homogène, existence d'une politique optimale, convergence de l'itération sur les valeurs, ergodicité et condition de non-péremption.

Calibré sur les 26 provinces et vérifié par une étude de recouvrement des paramètres et une validation prédictive, le modèle montre que la coordination multi-échelon fondée sur la position de stock porte le taux de service national de 74,7 % à 97,7 %, réduit les pertes de 9,5 % à 0,4 % et diminue le coût logistique d'environ trois quarts.
Les performances des provinces enclavées restent bornées par l'interaction entre délai, durée de vie résiduelle et capacité ; le Corollaire 7 en donne un critère explicite. Le cadre proposé, dont le code est ouvert, constitue un outil d'aide à la décision transposable à d'autres programmes de vaccination en contexte de ressources limitées.

Remerciements

Nous remercions le PEV-RDC pour la disponibilité des données et les paramètres provinciaux (Tableau 2).

Conflits d'intérêts

Les auteurs déclarent n'avoir aucun conflit d'intérêts.

Références bibliographiques

[1] World Health Organization, "Measles vaccines: WHO position paper – April 2017", *Weekly Epidemiological Record*, *92*(17), 2017, 205-227.

[2] World Health Organization, Regional Office for Africa, *Deaths from Democratic Republic of the Congo measles outbreak top 6000* (Kinshasa: OMS-AFRO, 7 janvier 2020), https://www.afro.who.int/news/deaths-democratic-republic-congo-measles-outbreak-top-6000.

[3] WHO & UNICEF, *Democratic Republic of the Congo: WHO and UNICEF estimates of immunization coverage, 2025 revision* (Genève/New York: WHO-UNICEF, 2026), https://data.unicef.org/wp-content/uploads/cp/immunisation/wuenic_cod.pdf.

[4] E. Lankiewicz, J.K. Mpemba, P.S. Dikassa, *et al.*, "Trends in vaccination coverage and equity in the Democratic Republic of the Congo from 2017 to 2023", *Vaccine*, *62*, 2025, 127609.

[5] M.B. Labama, E.B. Longembe, & J.L. Likwela, "Effectiveness of vaccine management and quality of immunization services in the Expanded Programme on Immunization (EPI) antenna in the Kisangani region, Democratic Republic of Congo", *Pan African Medical Journal*, *27*, 2017 (PMID 28748006).

[6] Ministère de la Santé Publique, Hygiène et Prévention, Programme Élargi de Vaccination, *Rapports annuels et rapports de gestion des stocks du PEV-RDC, 2020-2025* (Kinshasa: PEV-RDC, 2020-2025).

[7] World Health Organization, *Measles and rubella vaccine, live attenuated (freeze-dried), 10 doses – prequalified vaccine profile* (Genève: WHO, consulté le 13 octobre 2026), https://extranet.who.int/prequal/vaccines/p/measles-and-rubella-vaccine-live-attenuated-freeze-dried-1.

[8] S. Nahmias, "Perishable inventory theory: A review", *Operations Research*, *30*(4), 1982, 680-708.

[9] L.E. Duijzer, W. van Jaarsveld, & R. Dekker, "Literature review: The vaccine supply chain", *European Journal of Operational Research*, *268*(1), 2018, 174-192.

[10] K. De Boeck, C. Decouttere, & N. Vandaele, "Vaccine distribution chains in low- and middle-income countries: A literature review", *Omega*, *97*, 2020, 102097.

[11] H.W. Hethcote & P. Waltman, "Optimal vaccination schedules in a deterministic epidemic model", *Mathematical Biosciences*, *18*(3-4), 1973, 365-381.

[12] H.W. Hethcote, "Optimal ages of vaccination for measles", *Mathematical Biosciences*, *89*(1), 1988, 29-52.

[13] D. Aldila & D. Asrianti, "A deterministic model of measles with imperfect vaccination and quarantine intervention", *Journal of Physics: Conference Series*, *1218*, 2019, 012044.

[14] M.A. Kuddus, M. Mohiuddin, & A. Rahman, "Mathematical analysis of a measles transmission dynamics model in Bangladesh with double dose vaccination", *Scientific Reports*, *11*, 2021, doi:10.1038/s41598-021-95913-8.

[15] [Initiales] Pokharel *et al.*, "Modeling measles transmission in adults and children: Implications to vaccination for eradication", *Infectious Disease Modelling*, *9*(4), 2024, 1007-1026.

[16] S.-I. Chen, B.A. Norman, J. Rajgopal, T.M. Assi, B.Y. Lee, & S.T. Brown, "A planning model for the WHO-EPI vaccine distribution network in developing countries", *IIE Transactions*, *46*(8), 2014, 853-865.

[17] J. Lim, E. Claypool, B.A. Norman, & J. Rajgopal, "Outreach planning models for EPI vaccination programs in low and middle income countries", *Operations Research for Health Care*, *9*, 2016, 40-48.

[18] J. Lim, B.A. Norman, & J. Rajgopal, "Redesign of vaccine distribution networks", *International Transactions in Operational Research*, *29*(1), 2022, 200-225.

[19] Y. Yang, H. Bidkhori, & J. Rajgopal, "Optimizing vaccine distribution networks in low and middle-income countries", *Omega*, *99*, 2021, 102197.

[20] S.-I. Chen, B.A. Norman, J. Rajgopal, & B.Y. Lee, "Passive cold devices for vaccine supply chains", *Annals of Operations Research*, *230*(1), 2015, 87-105.

[21] I.Z. Karaesmen, A. Scheller-Wolf, & B. Deniz, "Managing perishable and aging inventories: Review and future research directions", in K.G. Kempf, P. Keskinocak, & R. Uzsoy (Eds.), *Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise* (New York: Springer, 2011), 393-436.

[22] R. Haijema, J. van der Wal, & N.M. van Dijk, "Blood platelet production: Optimization by dynamic programming and simulation", *Computers & Operations Research*, *34*(3), 2007, 760-779.
[23] A.J. Clark & H. Scarf, "Optimal policies for a multi-echelon inventory problem", *Management Science*, *6*(4), 1960, 475-490.
[24] S. Axsäter, *Inventory Control*, 3rd ed. (Cham: Springer, 2015).
[25] P.H. Zipkin, *Foundations of Inventory Management* (Boston: McGraw-Hill, 2000).
[26] H.L. Lee, V. Padmanabhan, & S. Whang, "Information distortion in a supply chain: The bullwhip effect", *Management Science*, *43*(4), 1997, 546-558.
[27] H.L. Lee & C. Billington, "Material management in decentralized supply chains", *Operations Research*, *41*(5), 1993, 835-847.
[28] T.M. Assi, S.T. Brown, A. Djibo, *et al.*, "Impact of changing the measles vaccine vial size on Niger's vaccine supply chain: A computational model", *BMC Public Health*, *11*, 2011, 425.
[29] T.M. Assi, S.T. Brown, S. Kone, *et al.*, "Removing the regional level from the Niger vaccine supply chain", *Vaccine*, *31*(26), 2013, 2828-2834.
[30] S.T. Brown, B. Schreiber, B.E. Cakouros, *et al.*, "The benefits of redesigning Benin's vaccine supply chain", *Vaccine*, *32*(32), 2014, 4097-4103.
[31] L.A. Haidari, D.L. Connor, A.R. Wateska, *et al.*, "Augmenting transport versus increasing cold storage to improve vaccine supply chains", *PLoS One*, *8*(5), 2013, e64303.
[32] B.Y. Lee, T.M. Assi, K. Rookkapan, *et al.*, "Replacing the measles multi-dose vaccine presentation with the single-dose presentation in Thailand", *Vaccine*, *29*(21), 2011, 3811-3817.
[33] B.Y. Lee, B.A. Norman, T.M. Assi, *et al.*, "Single versus multi-dose vaccine vials: An economic computational model", *Vaccine*, *28*(32), 2010, 5292-5300.
[34] A. Dhamodharan & R.A. Proano, "Determining the optimal vaccine vial size in developing countries: A Monte Carlo simulation approach", *Health Care Management Science*, *15*(3), 2012, 188-196.
[35] J. Rajgopal, D.L. Connor, T.M. Assi, *et al.*, "The optimal number of routine vaccines to order at health clinics in low and middle income countries", *Vaccine*, *29*(33), 2011, 5512-5518.
[36] M.H. Mofrad, L.M. Maillart, B.A. Norman, & J. Rajgopal, "Dynamically optimizing the administration of vaccines from multi-dose vials", *IIE Transactions*, *46*(7), 2014, 623-635.
[37] M.H. Mofrad, L.M. Maillart, B.A. Norman, & J. Rajgopal, "Multi-dose vial administration with non-stationary demand and delayed service", *Operations Research for Health Care*, *19*, 2018, 66-79.
[38] M.H. Mofrad, G.-G.P. Garcia, L.M. Maillart, B.A. Norman, & J. Rajgopal, "Waste-minimizing immunization clinic guidelines", *Socio-Economic Planning Sciences*, *54*, 2016, 1-17.
[39] Y. Yang & J. Rajgopal, "Outreach strategies for vaccine distribution: A multi-period stochastic modeling approach", *SN Operations Research Forum*, *2*(2), 2021.
[40] Q. Lin, Q. Zhao, & B. Lev, "Cold chain transportation decision in the vaccine supply chain", *European Journal of Operational Research*, *283*(1), 2020, 182-195.
[41] M.L. Puterman, *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming* (New York: Wiley, 1994).
[42] D.P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control*, Vol. II, 4th ed. (Belmont, MA: Athena Scientific, 2012).
[43] D.P. Bertsekas & S.E. Shreve, *Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case* (New York: Academic Press, 1978).
[44] J.R. Norris, *Markov Chains* (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).
[45] H.C. Tijms, *A First Course in Stochastic Models* (Chichester: Wiley, 2003).
[46] S.P. Meyn & R.L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, 2nd ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 2009).
[47] R.G. Sargent, "Verification and validation of simulation models", *Journal of Simulation*, *7*(1), 2013, 12-24.
[48] A.M. Law, *Simulation Modeling and Analysis*, 5th ed. (New York: McGraw-Hill, 2015).
[49] W.K. Newey & K.D. West, "A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix", *Econometrica*, *55*(3), 1987, 703-708.
[50] A.C. Cameron & P.K. Trivedi, *Regression Analysis of Count Data*, 2nd ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 2013).
[51] J.D.C. Little, "A proof for the queuing formula L = λW", *Operations Research*, *9*(3), 1961, 383-387.